



Quantitative Comparison of the Accuracy of the Third-Order Acceleration Method with Other Numerical Methods

Research Article

Masoud Mahmoodabadi¹, Fateme Hatefi², Fateme Ansari³

DOI: [10.22067/jfcee.2024.85785.1276](https://doi.org/10.22067/jfcee.2024.85785.1276)

1. Introduction

The fundamental assumption of the third-order acceleration method is that the changes in acceleration over the time interval Δt are represented by a cubic polynomial. To quantitatively compare the error of this method with other numerical methods, a linear single-degree-of-freedom system was considered. Next, this system was subjected to a harmonic sinusoidal load with a specific frequency. Using second-order and third-order acceleration methods, as well as other numerical methods, the errors were quantitatively calculated and compared using the root mean square error (RMSE) criterion. In addition, cubic polynomials for error trends in terms of time step and damping were obtained, which showed a high correlation with the actual values.

2. Quantitative Comparison of the Error of Different Numerical Methods

In this section, to quantitatively compare the errors of different methods, a linear mass-spring-damper system with a frequency of 1 Hz was considered. The analytical response of this system to harmonic sinusoidal loading is available in structural dynamics textbooks. For this system, damping ratios of 1%, 2%, 5%, 10%, and 20% were considered. The harmonic loading frequency varied from 0.01 Hz to 3 Hz with an increment of 0.01 Hz. For 300 harmonic loadings, the RMSE was calculated for Δt values of 0.02, 0.04, 0.06, 0.08, 0.10, 0.12, 0.14, 0.16, 0.18, and 0.20 seconds. The number of points considered for calculating the RMSE criterion was 1001 points. For 12 methods, there are 50 data points for ten Δt values and five damping ratios. The average error for different Δt values and the average damping ratios for each method are defined as the average mean errors. In the bar chart shown in Figure 1, the average mean error values for different

time steps are presented for the 12 methods mentioned in this article. At the top of the bar chart of each method, a number is shown in a box indicating the error ratio of the 0.2-second time step to the 0.02-second time step. The highest ratio is related to the enhanced Jennings method with a ratio of 19940, indicating the high sensitivity of this method to the time step. The lowest ratios are related to the Wilson-Theta method with a ratio of 3.946, indicating the low sensitivity of this method to the time step. For other methods, these ratios are two-digit numbers.

By calculating the average value of ten errors related to different time steps, the following results were obtained. The lowest error is related to the enhanced Jennings method with a ratio of 1, and the order of increasing error is as follows:

- Third-order acceleration method (Extended Unit Weighting Function) with an error ratio of 8.805
- Jennings method with an error ratio of 8.805
- Third-order acceleration method (Extended Petrov-Galerkin Weighting Function) with an error ratio of 8.819
- Third-order acceleration method (Extended Least Squares Weighting Function) with an error ratio of 8.819
- Second-order acceleration method (Unit Weighting Function) with an error ratio of 9.044
- Second-order acceleration method (Petrov-Galerkin Weighting Function) with an error ratio of 9.556
- Second-order acceleration method (Least Squares Weighting Function) with an error ratio of 9.556
- Newmark Method (Linear Acceleration) with an error ratio of 45.18

*Manuscript received December 9, 2023, Revised June 12, 2024, and Accepted, July 21, 2024.

¹ Corresponding author. Assistant Professor, Department of Civil Engineering, University of Qom, Qom, Iran.

Email: m.mahmoudabadi@qom.ac.ir

² MSc student, Department of Civil Engineering, University of Qom, Qom, Iran.

³ MSc student, Department of Civil Engineering, University of Qom, Qom, Iran.

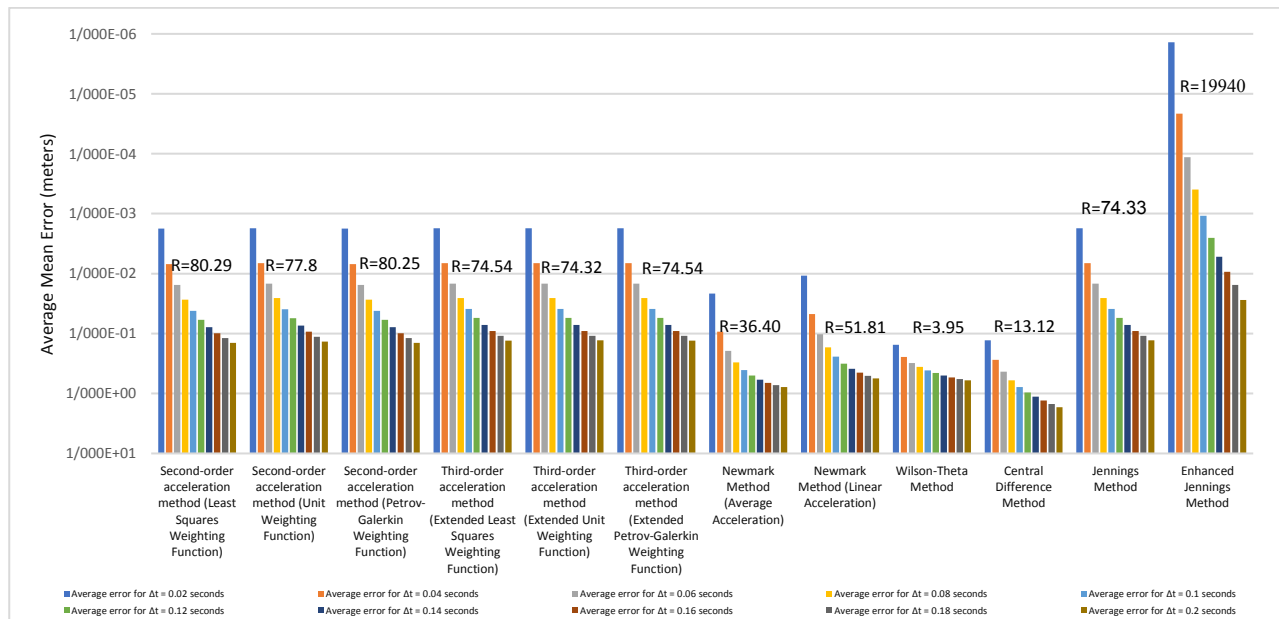


Figure 1: Average mean errors of different numerical methods for various damping ratios and Δt values from 0.02 seconds to 0.2 seconds

- Wilson-Theta Method with an error ratio of 67.19
- Newmark Method (Average Acceleration) with an error ratio of 69.16
- Central Difference Method with an error ratio of 142.7

3. Conclusion

In this article, the third-order acceleration method was extended using unit weighting functions, Petrov-Galerkin weighting functions, and least squares weighting functions. Subsequently, a single-degree-of-freedom system with a frequency of 1 Hz and damping ratios of 1%, 2%, 5%, 10%, and 20% was considered under harmonic loading. The harmonic loading frequency varied from 0.01 Hz to 3 Hz in increments of 0.01 Hz, and its analytical (exact) response was calculated. Afterwards, the response of this structure was calculated using the third-order acceleration method, second-order acceleration method, Newmark method (average acceleration method and linear acceleration method), Wilson method, central difference method, Jennings method, and enhanced Jennings method.

The error for each method was calculated using the RMSE criterion. This was performed for ten Δt values, with the smallest being 0.02 seconds and the largest being 0.20 seconds. The results showed that the greatest error reduction in the third-order acceleration method compared to the second-order acceleration method occurred for a damping ratio of 1% and $\Delta t = 0.2$ seconds. The least error for all Δt values was related to the enhanced Jennings method.

Given that the analysis was conducted for ten time steps and five damping ratios, each method included fifty average errors. By averaging these fifty errors, the average of the average errors was obtained, with the smallest being related to the enhanced Jennings method and the largest to the central difference method. The Jennings method and the third-order acceleration method had approximately the same error, with their error ratio to the minimum error being about 8.8.

Finally, the error trends concerning time step and damping were examined, and cubic polynomial relationships were proposed that had a high correlation with their actual values.



مقایسه کمی میزان دقت روش شتاب مرتبه ۳ با دیگر روش های عددی*

یادداشت پژوهشی

فاطمه انصاری^(۳)

فاطمه هاتفی اردکانی^(۲)

مسعود محمودآبادی^(۱)

DOI: 10.22067/jfpei.2024.85785.1276

چکیده فرض اساسی روش شتاب مرتبه ۳ این است که تغییرات شتاب در بازه زمانی Δt به صورت یک چندجمله‌ای درجه سوم می‌باشد. برای مقایسه کمی میزان خطای این روش با دیگر روش های عددی، یک سیستم یک درجه آزاد خطی در نظر گرفته شد. سپس، به این سیستم بارگذاری هارمونیک سینوسی با فرکانس مشخص اعمال گردید. با استفاده از روش های عددی شتاب مرتبه دوم و نیز روش شتاب مرتبه سوم و روش های عددی دیگر و با استفاده از معیار جذر میانگین مربعات، خطاهای روش های مختلف به صورت کمی محاسبه شده و با یکدیگر مقایسه شدند. همچنین، چندجمله‌ای هایی درجه ۳ برای روند تغییرات خطا بر حسب گام زمانی و میرایی بدست آمد که همبستگی بسیار مناسبی با مقادیر واقعی آن داشت.

واژه های کلیدی روش شتاب مرتبه ۳، تابع وزنی، انتگرال باقیمانده وزن دار، انتگرال گیری مستقیم زمانی، خطای جذر میانگین مربعات، برازش منحنی.

Quantitative Comparison of the Accuracy of the 3rd Order Acceleration Method with other Numerical Methods

Masoud Mahmoodabadi

Fateme Hatefi

Fateme Ansari

Abstract The basic assumption of the 3rd order acceleration method is that the acceleration changes in the time interval Δt is in the form of a third degree polynomial. To quantitatively compare the error rate of this method with other numerical methods, a linear one-degree-of-freedom system was considered. Then, sinusoidal harmonic loading with a specific frequency was applied to this system. Using numerical methods of second-order acceleration and third-order acceleration and other numerical methods and using the root mean square criterion, the errors of different methods were quantitatively calculated and compared with each other. Also, 3rd degree polynomials were obtained for the trends of error changes in terms of time step and damping, which had a very good correlation with its real values..

Key words 3rd order acceleration method, weighted function, weighted residual integral, direct time integration, root mean square error, curve fitting

* تاریخ دریافت مقاله ۱۴۰۲/۹/۱۸ و تاریخ پذیرش آن ۱۴۰۳/۴/۳۱ می‌باشد.

(۱) نویسنده مسئول، استادیار، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه قم، قم، ایران.

(۲) دانشجوی ارشد سازه، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه قم، قم، ایران.

(۳) دانشجوی ارشد سازه، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه قم، قم، ایران.

مقدمه

در حالت کلی، رفتار دینامیکی سازه‌ها به دو صورت خطی و غیرخطی در نظر گرفته می‌شود که معادله دیفرانسیل حاکم بر این سیستم‌ها، یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خواهد بود بطوریکه روش‌های حل آن، به دو دسته کلی روش جمع آثار مدی و روش انتگرال‌گیری مستقیم زمانی دسته‌بندی می‌شود.

در سیستم‌های خطی، اگر پاسخ سازه در لحظه t موردنظر باشد، طبق روش انتگرال‌گیری مستقیم زمانی، ابتدا بازه $[0, t]$ به n زیر بازه تقسیم شده که معمولاً طول این زیر بازه‌ها (Δt) را با هم مساوی در نظر می‌گیرند. در هر یک از این زیر بازه‌ها (Δt) خواص سازه مانند سختی ثابت بوده و پاسخ در انتهای هر گام محاسبه می‌شود و سپس از این پاسخ به عنوان شرایط اولیه برای گام بعدی استفاده می‌شود.

از بین روش‌های انتگرال‌گیری زمانی مشروط پایدار، روش‌های شتاب خطی نیومارک و تفاضل مرکزی به علت دقت خوب، بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرند که در این دو روش کلاسیک مرتبه تغییرات شتاب، حد اکثر بصورت خطی تغییر می‌کند. در مرجع [1]، مرتبه تغییرات شتاب در هر گام زمانی بصورت سهموی فرض شده که در نتیجه چند جمله‌ای مرتبه چهار تابع جابجایی، دارای پنج ضریب مجهول خواهد بود. این مقاله به عنوان مرجع اصلی در نظر گرفته شد با این تفاوت که مرتبه تغییرات شتاب در هر گام زمانی بصورت درجه ۳ در نظر گرفته شد. در نتیجه، در این حالت که شتاب به صورت چندجمله‌ای مرتبه سوم در نظر گرفته شد؛ تابع جابجایی، یک تابع درجه ۵ با شش ضریب بود. با توجه به اینکه با افزایش مرتبه شتاب، تعداد جملات بیشتری در بسط سری تیلور نسبت به روش‌های کلاسیک موجود در نظر گرفته می‌شود؛ بنابراین انتظار می‌رود که در روش پیشنهادی با مرتبه شتاب درجه ۳، دقت آن نسبت به روش‌های کلاسیک دیگر بالاتر باشد. در این روش برای محاسبه انتگرال باقیمانده وزن‌دار از سه تابع وزنی؛ واحد، پترو گالرکین و حداقل مربعات استفاده شد.

در مرجع [1] فرمولاسیون روش شتاب سهموی ارائه گردیده است. در این روش، تغییرات شتاب در هر گام زمانی به صورت درجه ۲ در نظر گرفته شده‌است. در این مقاله تغییرات شتاب در هر گام زمانی به صورت درجه ۳ در نظر گرفته شد که این موضوع نوآوری این مقاله می‌باشد. نویسندگان این مقاله بر این

باورند که بسط روش شتاب مرتبه ۳ برای اولین بار است که لااقل در ایران انجام می‌شود. لازم به ذکر است در مرجع [1] پاسخ دقیق یک ساختمان برشی با رفتار غیر خطی تحت بارگذاری سینوسی محاسبه گردیده است و سپس پاسخ تقریبی آن با روش نیومارک و روش شتاب سهموی محاسبه گردیده است و به صورت نمودارهای تاریخچه زمانی، پاسخ طبقات اول و دوم با پاسخ دقیق آنها مقایسه شده‌است. نقصی که بنظر می‌رسد در مرجع [1] وجود دارد، این است که پاسخ‌های تقریبی با پاسخ‌های دقیق متناظرشان به صورت کیفی و نموداری مقایسه شده‌اند. در این مقاله، خطاهای ۱۲ روش مختلف عددی، به صورت کمی (عددی) برای ۳۰۰ فرکانس بارگذاری محاسبه شده و با یکدیگر مقایسه شده‌اند. به عبارت دیگر، با استفاده از پارامتر (کمیت) جذر میانگین مربعات، خطاهای روش‌های مختلف با یکدیگر به ازای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد و ده گام زمانی مقایسه شده‌اند که منجر به حجم زیادی داده گردیده است. برای مقایسه روش‌های مختلف با یکدیگر، میانگین خطاهای فرکانس‌های مختلف با یکدیگر مقایسه شده و نتیجه‌گیری‌های لازم انجام شده است. علاوه بر این، روش شتاب سهموی، به روش شتاب مرتبه سوم بسط داده شده و میزان خطای این روش، با روش شتاب مرتبه دوم (سهموی)، مقایسه و نتیجه‌گیری‌های لازم انجام شده است.

غلامپور و همکاران [1]، یک روش باقیمانده وزن‌دار با استفاده از چند تابع وزنی برای حل مسائل دینامیکی غیرخطی سازه‌ها ارائه نمودند. آنها مرتبه تغییرات شتاب را در هر گام زمانی بصورت سهموی فرض نمودند. در نتیجه چندجمله‌ای جابجایی مربوطه از درجه ۴ بود و لازم بود که پنج ضریب مجهول این چندجمله‌ای محاسبه گردد. آنها برای محاسبه این پنج ضریب مجهول از پنج معادله استفاده کردند. آنها سه معادله از این ۵ معادله را از ارضای معادلات جابجایی، سرعت و شتاب در ابتدای هر گام بدست آوردند و دو معادله دیگر را با محاسبه انتگرال باقیمانده وزن‌دار و با چهار تابع وزنی؛ واحد، پترو گالرکین، حداقل مربعات و کالوکیشن بدست آوردند. آنها اذعان داشتند که از روش شتاب سهموی پاسخ‌های بهتر و دقیق‌تری حاصل می‌گردد.

چانگ (Chang) [2]، به بررسی روش صریح نیومارک پرداخت که بر اساس نتایج ارزیابی تحلیلی انجام شده‌است. او

که در این رابطه M ، C و K به ترتیب جرم، میرایی و سختی سازه است. $P(t)$ نیروی وارده به سازه و y ، \dot{y} و \ddot{y} به ترتیب جابجایی، سرعت و شتاب است. در روش شتاب مرتبه ۳، تغییرات شتاب در هر گام زمانی بصورت یک چند جمله‌ای مرتبه سوم در نظر گرفته می‌شود. در نتیجه، معادله تغییر مکان در هر گام زمانی بصورت یک تابع چند جمله‌ای کامل مرتبه پنج خواهد بود که:

$$y(t) = at^5 + bt^4 + ct^3 + dt^2 + et + f \quad (2)$$

که در این رابطه a تا f شش ضریب ثابت مجهول هستند که باید در هر گام زمانی محاسبه شوند.

با مشتق‌گیری از رابطه (۲) نسبت به زمان، توابع سرعت و شتاب بصورت روابط زیر بدست می‌آیند:

$$\dot{y}(t) = 5at^4 + 4bt^3 + 3ct^2 + 2dt + e \quad (3)$$

$$\ddot{y}(t) = 20at^3 + 12bt^2 + 6ct + 2d \quad (4)$$

برای محاسبه این شش ضریب ثابت مجهول در هر گام زمانی، به شش معادله نیاز داریم. سه معادله از ارضای روابط جابه‌جایی و سرعت و شتاب در ابتدای هر گام زمانی بدست می‌آید که به صورت رابطه زیر می‌باشد:

$$y(t=0) = f = y_0 \quad (5)$$

$$\dot{y} = \dot{y}_0 \quad (6)$$

$$\ddot{y}(t=0) = 2d = \ddot{y}_0 \quad (7)$$

از طرفی با ارضای معادله حرکت در ابتدای گام زمانی داریم:

$$M\ddot{y}_0 + C\dot{y}_0 + Ky_0 = P_0 \quad (8)$$

بنابراین با جایگذاری روابط (۵) و (۶) و (۷) در رابطه (۸) داریم:

$$M(2d) + C(e) + K(f) = P_0 \rightarrow d = \frac{P_0 - C \cdot e - K \cdot f}{2M} \quad (9)$$

معادله چهارم، طبق معادله (۸) از ارضای معادله حرکت در انتهای گام زمانی بدست می‌آید.

$$M \cdot \ddot{y}_{\Delta t} + C \cdot \dot{y}_{\Delta t} + K \cdot y_{\Delta t} = P_{\Delta t} \quad (10)$$

$$M \cdot (20a\Delta t^3 + 12b\Delta t^2 + 6c\Delta t + 2d) + C \cdot (5a\Delta t^4 + 4b\Delta t^3 + 3c\Delta t^2 + 2d\Delta t + e) + K(a\Delta t^5 + b\Delta t^4 + c\Delta t^3 + d\Delta t^2 + e\Delta t + f) = P_{\Delta t} \quad (11)$$

همانطور که می‌دانیم در این روش عددی مانند روش‌های

اذعان داشت در حل گام به گام یک سیستم الاستیک خطی، یک گام زمانی مناسب می‌تواند بر پایه نتایج ارزیابی تحلیلی انتخاب شود؛ اگر چه هیچ راهی برای انتخاب یک گام زمانی مناسب برای انتگرال‌گیری دقیق یک سیستم غیر خطی وجود ندارد. او در این مطالعه بعد از معرفی درجه غیرخطی لحظه‌ای، ویژگی‌های عددی روش صریح نیومارک رابه صورت تحلیلی مورد ارزیابی قرار داد. او بیان کرد که حد پایداری بالایی برای یک سیستم الاستیک خطی برابر با ۲ است، که این مقدار، اغلب در مقاومت سخت شدگی لحظه‌ای، کاهش پیدا می‌کند و در مقاومت نرم شدگی لحظه‌ای، افزایش پیدا می‌کند.

محمودآبادی و همکاران [4]، روش جنینگز را با استفاده از تابع درونیابی اسپلاین درجه سه ارتقاء دادند. آنها به صورت مقایسه‌ای مزیت‌ها و معایب روش جنینگز که مبتنی بر روابط دقیق و فرض تغییرات خطی تحریک بود را نسبت به روش درونیابی اسپلاین ارزیابی نمودند.

محمودآبادی و حسینی [5]، طیف‌های پاسخ غیرخطی شبه شتاب سیستم‌های الاستو پلاستیک با شکل پذیری ثابت با شتاب نگاشت الاسترو که با روش درون یابی خطی تحریک و نیز با استفاده از تابع اسپلاین مکعبی به دست آمده بود، با یکدیگر مقایسه کردند. طیف‌های پاسخ غیر خطی برای شکل پذیری‌های ۱، ۱/۵، ۲، ۴ و ۸ محاسبه شدند.

در ادامه در بخش ۲، روش شتاب مرتبه ۳ به تفصیل شرح داده شده است. همچنین در بخش‌های ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ مقاله به ترتیب روش‌های شتاب مرتبه ۲، روش نیومارک، (روش شتاب متوسط و شتاب خطی)، روش ویلسون، روش تفاضل مرکزی و روش جنینگز و جنینگز ارتقاء یافته شرح داده شده است. در بخش ۸، یک سیستم یک درجه آزاد خطی تحت طیفی از بارگذاری‌های سینوسی با فرکانس‌های مختلف به روش‌های فوق‌الذکر، تحلیل گردیده است و خطای روش‌های مختلف با یکدیگر مقایسه شده‌اند. در پایان و در بخش ۹، نتیجه‌گیری و پیشنهادات برای کارهای بعدی آمده است.

روش شتاب مرتبه ۳

معادله دیفرانسیل حرکت برای یک سازه یک درجه آزاد با رفتار خطی بصورت رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$M\ddot{y} + C\dot{y} + Ky = P(t) \quad (1)$$

$$\int_0^{\Delta t} t^3 (\text{remainder}) dt = 0 \quad (22)$$

در نتیجه مجهولات a و b و c با حل همزمان معادلات (۲۰) و (۲۱) و (۲۲) بدست می‌آیند.

تابع وزنی حداقل مربعات

مربع تابع باقیمانده بصورت رابطه زیر بیان می‌شود:

$$(\text{remainder})^2 = \int_0^{\Delta t} [m\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + ky(t) - P(t)]^2 dt \quad (23)$$

برای حداقل سازی این تابع باقیمانده، سه معادله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{\partial (\text{remainder})^2}{\partial a} = 0 \quad (24)$$

$$\frac{\partial (\text{remainder})^2}{\partial b} = 0 \quad (25)$$

$$\frac{\partial (\text{remainder})^2}{\partial c} = 0 \quad (26)$$

بنابراین با به کارگیری معادلات (۲۰)، (۲۱) و (۲۲) در معادلات (۲۴) و (۲۵) و (۲۶)، داریم:

$$\int_0^{\Delta t} [m\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + Ky(t) - P(t)] \left(m \frac{\partial \ddot{y}(t)}{\partial a} + C \frac{\partial \dot{y}(t)}{\partial a} + K \frac{\partial y(t)}{\partial a} \right) dt = 0 \quad (27)$$

$$\int_0^{\Delta t} [m\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + Ky(t) - P(t)] \left(m \frac{\partial \ddot{y}(t)}{\partial b} + C \frac{\partial \dot{y}(t)}{\partial b} + K \frac{\partial y(t)}{\partial b} \right) dt = 0 \quad (28)$$

$$\int_0^{\Delta t} [m\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + Ky(t) - P(t)] \left(m \frac{\partial \ddot{y}(t)}{\partial c} + C \frac{\partial \dot{y}(t)}{\partial c} + K \frac{\partial y(t)}{\partial c} \right) dt = 0 \quad (29)$$

حال با حل همزمان معادلات (۲۷) و (۲۸) و (۲۹)، مجهولات a و b و c محاسبه می‌شوند.

روش شتاب مرتبه ۲

در این روش شتاب در هر گام زمانی به صورت سهموی در نظر گرفته می‌شود. در نتیجه تابع تغییر مکان یک چند جمله‌ای درجه چهار بر حسب زمان است. روش شتاب مرتبه ۲ در مرجع [1] به طور کامل توضیح داده شده است.

کلاسیک دیگر، به دلیل تقریبی بودن معادله تعادل حرکت در بازه $[0, t]$ بطور کامل ارضا نمی‌شود؛ در نتیجه یک تابع باقیمانده می‌توان تعریف کرد، بطوریکه [1]:

$$\text{remainder} = P - M\ddot{y} - C\dot{y} - Ky \quad (12)$$

که برای حداقل سازی این تابع باقیمانده از انتگرال باقیمانده وزنی استفاده می‌کنیم که:

$$\int_0^{\Delta t} W_i \times (\text{remainder}) dt = 0 \quad (13)$$

که در این رابطه، W_i تابع وزنی می‌باشد. برای یافتن ضرایب مجهول a ، b و c توابع وزنی را در ادامه به صورت زیر در نظر می‌گیریم. حال با محاسبه این شش ثابت مجهول در هر گام زمانی، پاسخ در انتهای هر گام زمانی با استفاده از روابط زیر محاسبه می‌شود:

$$y(t) = a\Delta t^5 + b\Delta t^4 + c\Delta t^3 + d\Delta t^2 + e\Delta t + f \quad (14)$$

$$\dot{y}(t) = 5a\Delta t^4 + 4b\Delta t^3 + 3c\Delta t^2 + 2d\Delta t + e \quad (15)$$

$$\ddot{y}(t) = 20a\Delta t^3 + 12b\Delta t^2 + 6c\Delta t + 2d \quad (16)$$

این پاسخ به عنوان شرایط اولیه برای گام زمانی بعدی در نظر گرفته شده و روابط فوق، مجدداً برای گام بعدی استفاده می‌شود؛ بطوریکه در انتها پاسخ در لحظه مورد نظر بدست آید. حال این توابع وزنی واحد بسط داده شده، پتروگالرکین بسط داده شده و حداقل مربعات بصورت زیر تعریف می‌شوند:

تابع وزنی واحد بسط داده شده

در این حالت با استفاده از توابع وزنی $W_1=1$ و $W_2=t$ رابطه (۱۳) به صورت رابطه زیر تبدیل می‌شود:

$$\int_0^{\Delta t} (\text{remainder}) dt = 0 \quad (17)$$

$$\int_0^{\Delta t} t (\text{remainder}) dt = 0 \quad (18)$$

حال با در نظر گرفتن همزمان معادلات (۱۱) و (۱۷) و (۱۸) مجهولات a و b و c محاسبه می‌شوند.

تابع وزنی پتروگالرکین بسط داده شده

در این روش سه تابع وزنی بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$W_1 = t \quad W_2 = t^2 \quad W_3 = t^3 \quad (19)$$

بنابراین با توجه به این دو تابع وزنی، رابطه (۱۳) به روابط زیر تبدیل می‌شود:

$$\int_0^{\Delta t} t (\text{remainder}) dt = 0 \quad (20)$$

$$\int_0^{\Delta t} t^2 (\text{remainder}) dt = 0 \quad (21)$$

روش‌های درونیابی است؛ در نتیجه، اگر بازه‌های زمانی بین نقاط شتابنگاشت نسبت به دوره تناوب طبیعی سازه کوچک باشد، درونیابی خطی قابل قبول بوده و دارای دقت کافی می‌باشد. در مرجع [5]، ذکر گردیده است که به ازای $\Delta t = \frac{T_n}{10}$ نتایج نسبتاً دقیقی به دست خواهد آمد. T_n دوره تناوب طبیعی ارتعاش سیستم یک درجه آزاد است. لازم به ذکر است روش جنینگز مبتنی بر روابط دقیق و فرض تغییرات خطی تحریک است و برای سیستم‌های یک و چند درجه آزاد دینامیکی خطی، قابل استفاده است. در این روش، تنها فرضی که برای حل معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت این سیستم‌ها استفاده می‌شود، فرض خطی بودن تحریک در فاصله Δt می‌باشد؛ به عبارت دیگر، سمت چپ معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت که به صورت معادله (۳۰) می‌باشد، بدون هیچگونه تغییری باقی می‌ماند و تنها فرض استفاده شده در این روش این است که سمت راست معادله حرکت تقریب زده می‌شود. تنها تقریب استفاده شده به این صورت است که تغییرات شتاب پایه به صورت خطی در بازه Δt در نظر گرفته می‌شود که در واقعیت مطمئناً به این صورت نیست [5].

معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت سیستم یک درجه آزادی جرم-فنر-میراگر عبارت است از:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \quad (30)$$

که در این معادله u و \dot{u} و \ddot{u} به ترتیب مقادیر جابجایی، سرعت و شتاب جرم m می‌باشند. در حالتی که بجای نیروی $p(t)$ سیستم یک درجه آزاد مورد بحث، تحت اثر حرکت افقی $u_g(t)$ زمین قرار گرفته باشد، در مرجع [5] ثابت شده است که معادله (۳۰) به شکل زیر در می‌آید:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{u}_g(t) \quad (31)$$

در معادله (۳۱)، u ، \dot{u} و \ddot{u} به ترتیب مقادیر جابجایی نسبی، سرعت نسبی و شتاب نسبی جرم m نسبت به زمین (تکیه‌گاه) می‌باشند و $\ddot{u}_g(t)$ نیز شتاب حرکت زمین است. شتاب حرکت زمین که بوسیله دستگاه‌های شتابنگار اندازه‌گیری می‌شود معمولاً به صورت یک مجموعه اعداد می‌باشند که به فواصل زمانی مشخص Δt از یکدیگر قرار دارند. به عنوان مثال، فواصل زمانی بین نقاط شتابنگاشت‌های ال‌سترو، ناغان و طبس برابر با ۰/۰۲ ثانیه می‌باشد.

روش جنینگز، روشی عددی برای حل معادله دیفرانسیل (۳۰) یا (۳۱) می‌باشد. این روش مبتنی بر روابط دقیق و فرض

روش نیومارک (روش شتاب متوسط و شتاب خطی)

نیومارک در سال ۱۹۵۹ دو روش معروف، موسوم به روش شتاب متوسط و روش شتاب خطی ارائه نموده است [۵]. در روش شتاب متوسط، تغییرات شتاب در هر گام زمانی ثابت فرض می‌شود، اما در روش شتاب خطی، تغییرات شتاب در هر گام زمانی خطی فرض می‌شود. روش شتاب متوسط، برای هر مقدار Δt ، هر چقدر بزرگ باشد، از نظر عددی پایدار است، اما روش شتاب خطی برای $\Delta t \leq 0.551 T_n$ پایدار می‌باشد. روابط و فرمولاسیون این روش در مرجع [5] آمده است.

روش ویلسون

ویلسون روش شتاب خطی که به صورت مشروط پایدار بود را اصلاح نمود و آنرا با اضافه کردن پارامتری به نام θ به صورت پایدار غیر مشروط درآورد. اگر $\theta = 1$ باشد، روش ویلسون، به روش شتاب خطی تبدیل می‌گردد. اگر $\theta \geq 1/37$ باشد، روش ویلسون پایدار غیر مشروط است. به استناد مرجع [5] مقدار $\theta = 1/42$ دقت بهینه دارد. در این مقاله از مقدار بهینه θ استفاده شده است.

روش تفاضل مرکزی

این روش مبتنی بر تقریب تفاضل محدود از مشتقات زمانی جابجایی (یعنی سرعت و شتاب) است. این روش از روش‌های صریح می‌باشد و پایدار مشروط است. یعنی اگر $\Delta t < \frac{T_n}{\pi}$ باشد، از نظر عددی روش پایدار است. جزئیات این روش در مرجع [5] آمده است.

روش جنینگز و روش جنینگز ارتقاء یافته

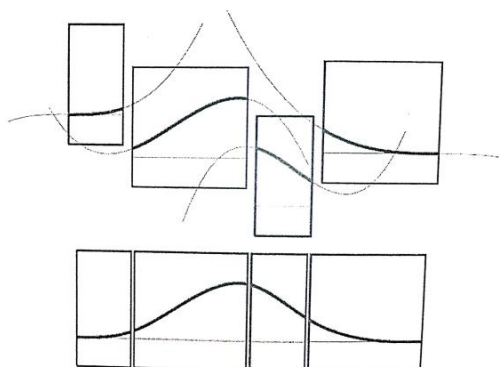
روش مبتنی بر روابط دقیق و فرض تغییرات خطی تحریک که بعضاً در مراجع فنی فارسی از آن به روش جنینگز یاد می‌شود، روش متعارف و معمولی است که برای محاسبه پاسخ سازه‌ها در برابر زلزله در محدوده رفتار خطی از آن استفاده می‌شود. در روش درونیابی خطی تحریک، همانطوریکه از اسم آن مشخص است، نقاط شتابنگاشت با پاره‌خط‌هایی به یکدیگر متصل می‌شوند؛ در نتیجه در محل اتصال پاره خط‌ها، شیب آنها لزوماً با یکدیگر برابر نمی‌باشد و فقط مقادیر تابع در محل اتصال آنها با یکدیگر برابر است. با توجه به اینکه درونیابی خطی تحریک، یکی از ساده‌ترین

هستند. لازم به ذکر است که $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ، $\zeta = \frac{c}{2m\omega_n}$ و $\omega_D = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ می‌باشد. همچنین، در حالتی که گام زمانی Δt ثابت باشد، کافی است که هشت ضریب 'A, B, C, ..., D' فقط یکبار محاسبه شوند.

هر گاه از درونیابی اسپلاین مکعبی به جای درونیابی خطی استفاده شود، سمت راست، سه درجه ۳ یک تابع تحریک درجه سه $p(t)$ در بازه زمانی $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ به شکل زیر بر حسب τ وجود دارد:

$$p(\tau) = a_1\tau^3 + b_1\tau^2 + c_1\tau + d_1 \quad (35)$$

در رابطه (۳۵)، a_1, b_1, c_1, d_1 ضرایب ثابتی هستند که چگونگی محاسبه آنها در مرجع [3] توضیح داده شده است. در حقیقت در روش جنینگر ارتقاء یافته در هر گام زمانی از یک چند جمله ای درجه ۳ بجای درونیابی خطی استفاده می‌شود. در شکل (۲) این چند جمله‌ای‌های اسپلاین هستند. در نقاط اتصال این منحنی‌ها، علاوه بر مقدار آنها شیب و مشتق دوم این منحنی‌ها نیز با یکدیگر برابر است.



شکل ۲ مفهوم منحنی‌های اسپلاین

حال معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر را در نظر بگیرید:

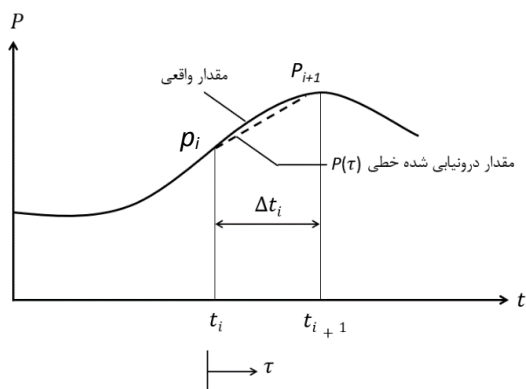
$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = a_1\tau^3 + b_1\tau^2 + c_1\tau + d_1 \quad t_i \leq \tau \leq t_{i+1} \quad (36)$$

این معادله با فرض اینکه میرایی سیستم زیر، مقدار بحرانی باشد، یک جواب عمومی به شکل زیر دارد:

$$u_{\text{general}}(\tau) = e^{-\zeta\omega_n\tau} [A \cos \omega_D \tau + B \sin \omega_D \tau] \quad (37)$$

در رابطه (۳۷)، A و B دو ضریب ثابت هستند. حل مکمل

تغییرات خطی تابع تحریک $p(t)$ است که در شکل (۱) مشخص شده است.



شکل ۱ نمادهای مورد استفاده در درونیابی خطی تحریک [5]

تابع تحریک $p(\tau)$ در بازه زمانی $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ را می‌توان به صورت یک تابع خطی بر حسب τ به شکل زیر بیان کرد:

$$p(\tau) = p_i + \frac{\Delta p_i}{\Delta t_i} \tau \quad (32)$$

که در آن $\Delta p_i = p_{i+1} - p_i$ می‌باشد و متغیر τ از صفر تا Δt_i تغییر می‌کند. پاسخ سیستم یک درجه آزاد مورد بحث در بازه زمانی $0 \leq \tau \leq \Delta t_i$ حاصل جمع سه قسمت است: (۱) ارتعاش آزاد تحت جابجایی اولیه u_i و سرعت اولیه \dot{u}_i در $\tau = 0$ ، پاسخ به نیروی پله‌ای p_i با شرایط اولیه صفر و (۳) پاسخ به نیروی شیب‌دار $\frac{\Delta p_i}{\Delta t_i} \tau$ با شرایط اولیه صفر. با جمع پاسخ‌های سه قسمت فوق‌الذکر، پاسخ $u(\tau)$ بدست می‌آید. با جایگذاری $\tau = \Delta t_i$ در $u(\tau)$ و $\dot{u}(\tau)$ ، جابجایی u_{i+1} و سرعت \dot{u}_{i+1} که به ترتیب جابجایی و سرعت جرم m در زمان t_{i+1} هستند، بدست می‌آید. جزئیات کار در مرجع [5] توضیح داده شده است و در نهایت در این مرجع، معادلات بازگشتی زیر برای محاسبه u_{i+1} و \dot{u}_{i+1} ارائه شده است:

$$u_{i+1} = Au_i + B\dot{u}_i + Cp_i + Dp_{i+1} \quad (33)$$

$$\dot{u}_{i+1} = A'\dot{u}_i + B'\dot{u}_i + C'p_i + D'p_{i+1} \quad (34)$$

مقادیر هشت ضریب 'A, B, C, ..., D' که در سمت راست روابط (۳۳) و (۳۴) وجود دارند، در مرجع [5] آورده شده‌اند. این ضرایب بستگی به پارامترهای ω_n, k و ζ سیستم یک درجه آزاد دارند. همچنین، آنها وابسته به بازه زمانی $\Delta t \equiv \Delta t_i$ نیز

گرفته شده است. پاسخ تحلیلی این سیستم در برابر بارگذاری هارمونیک سینوسی در کتب دینامیک سازه ها موجود می باشد. برای این سیستم، میرایی های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد در نظر گرفته شد. فرکانس بارگذاری هارمونیک از ۰/۰۱ هرتز تا ۳ هرتز با افزایش ۰/۱ در نظر گرفته شد و برای ۳۰۰ بارگذاری هارمونیک، مقدار جذر میانگین مربعات خطا برای Δt های ۰/۰۲، ۰/۰۴، ۰/۰۶، ۰/۰۸، ۰/۱۰، ۰/۱۲، ۰/۱۴، ۰/۱۶، ۰/۱۸ و ۰/۲۰ ثانیه محاسبه گردید. تعداد نقاط در نظر گرفته شده برای محاسبه معیار خطای جذر میانگین مربعات برابر با ۱۰۰۱ نقطه بود. در جدول شماره (۱) و (۲) مقادیر حداکثر خطا، حداقل خطا، میانگین خطا و انحراف معیار خطا، برای روش شتاب مرتبه سوم (روش حداقل مربعات) و روش شتاب مرتبه دوم (روش حداقل مربعات) برای $\Delta t = 0.1$ آورده شده است. با دقت در این جداول مشاهده می شود که مقدار میانگین خطا در روش شتاب مرتبه سوم برای میرایی های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب برابر با 1.0×10^{-2} ، 1.0×10^{-2} ، 1.0×10^{-2} ، 1.0×10^{-2} و 1.0×10^{-2} می باشند. همچنین، مشاهده می شود مقدار میانگین خطا در روش شتاب مرتبه دوم برای میرایی های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب برابر با 1.0×10^{-2} ، 1.0×10^{-2} ، 1.0×10^{-2} ، 1.0×10^{-2} و 1.0×10^{-2} می باشند. با مقایسه مقادیر میانگین خطای روش شتاب مرتبه سوم نسبت به مقادیر متناظر میانگین خطای روش شتاب مرتبه دوم، مشخص می گردد که برای میرایی های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب ۱۲/۸۹، ۶/۹۷، ۳/۲۰، ۱/۸۴ و ۱/۰۵ درصد کاهش خطا افتاده است. مقدار میانگین کاهش خطا برای این پنج میرایی برابر با ۵/۱۹ درصد می باشد.

یا خصوصی معادله دیفرانسیل (۳۷) با توجه به اینکه سمت راست این معادله یک تابع درجه سه بر حسب τ است را باید به صورت زیر در نظر گرفت:

$$u_p(\tau) = A'\tau^3 + B'\tau^2 + C'\tau + D' \quad (38)$$

که A' ، B' ، C' و D' چهار ضریب ثابت هستند که مقادیر آنها به شرح زیر است:

$$A' = \frac{i}{k} \quad (39)$$

$$B' = \frac{b_i - \frac{3i}{k}}{k} \quad (40)$$

$$C' = \frac{i}{k} - 6 \frac{i}{k^2} - \frac{2c(b_i - \frac{3i}{k})}{k^2} \quad (41)$$

$$D' = \frac{\left[d_i - \frac{2m(b_i - 3ca_i)}{k} \right]}{k} - \frac{c \left(c_i - \frac{6r a_i}{k} - \frac{2c(b_i - \frac{3i}{k})}{k} \right)}{k^2} \quad (42)$$

با جمع جواب های عمومی و خصوصی معادلات (۳۷) و (۳۸)، جواب کل بدست می آید:

$$u_{total}(\tau) = u_{general}(\tau) + u_p(\tau) \quad (43)$$

$$u_{total}(\tau) = e^{-\zeta \omega_n \tau} [A \cos \omega_D \tau + B \sin \omega_D \tau] + A'\tau^3 + B'\tau^2 + C'\tau + D' \quad (44)$$

که ضرایب ثابت A و B با اعمال تغییر مکان و سرعت اولیه در ابتدای گام زمانی محاسبه می شوند.

مقایسه کمی روش های مختلف عددی با یکدیگر

در این بخش برای مقایسه کمی خطاهای روش های مختلف، یک سیستم جرم- فنر - میراگر خطی با فرکانس ۱ هرتز در نظر

جدول ۱ مقادیر حداکثر، حداقل، میانگین و انحراف معیار جذر میانگین مربعات خطای پاسخ تغییر شکل بر حسب تغییر شکل استاتیکی برای میرایی های مختلف برای Δt برابر با ۰/۱۰ ثانیه - روش شتاب مرتبه سوم (روش حداقل مربعات - تابع تغییر مکان درجه ۵)

میرایی	۱ درصد	۲ درصد	۵ درصد	۱۰ درصد	۲۰ درصد
حداکثر خطا	۱/۰۰۵	۵/۳۹۶ × ۱۰ ^{-۱}	۲/۲۴۲ × ۱۰ ^{-۱}	۱/۱۴۰ × ۱۰ ^{-۱}	۵/۸۲۰ × ۱۰ ^{-۲}
بتای مربوط به حداکثر خطا	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۱	۱/۰۴
حداقل خطا	۲/۳۴۸ × ۱۰ ^{-۶}	۲/۳۴۲ × ۱۰ ^{-۶}	۲/۳۴۱ × ۱۰ ^{-۶}	۲/۳۴۱ × ۱۰ ^{-۶}	۲/۳۴۱ × ۱۰ ^{-۶}
بتای مربوط به حداقل خطا	۰/۰۱	۰/۰۱	۰/۰۱	۰/۰۱	۰/۰۱
میانگین خطا	۵/۲۹۸ × ۱۰ ^{-۲}	۴/۵۹۲ × ۱۰ ^{-۲}	۳/۷۸۰ × ۱۰ ^{-۲}	۳/۲۰۶ × ۱۰ ^{-۲}	۲/۶۳۸ × ۱۰ ^{-۲}
انحراف معیار خطا	۱/۰۲۴ × ۱۰ ^{-۱}	۷/۰۳۸ × ۱۰ ^{-۲}	۴/۰۳۵ × ۱۰ ^{-۲}	۲/۵۱۷ × ۱۰ ^{-۲}	۱/۵۲۱ × ۱۰ ^{-۲}

جدول ۲ مقادیر حداکثر، حداقل، میانگین و انحراف معیار جذر میانگین مربعات خطای پاسخ تغییرشکل بر حسب تغییرشکل استاتیکی برای میرایی‌های مختلف برای Δt برابر با ۰/۱۰ ثانیه - روش شتاب مرتبه دوم (روش حداقل مربعات - تابع تغییر مکان درجه ۴)

میرایی	۱ درصد	۲ درصد	۵ درصد	۱۰ درصد	۲۰ درصد
حداکثر خطا	۱/۷۰۶	۷/۴۸۱×۱۰ ^{-۱}	۲/۶۰۹×۱۰ ^{-۱}	۱/۲۳۴×۱۰ ^{-۱}	۶/۰۴۸×۱۰ ^{-۲}
بتای مربوط به حداکثر خطا	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۱	۱/۰۴
حداقل خطا	۳/۹۷۲×۱۰ ^{-۵}	۱/۴۳۸×۱۰ ^{-۵}	۴/۳۰۶×۱۰ ^{-۶}	۲/۶۵۸×۱۰ ^{-۶}	۲/۳۶۴×۱۰ ^{-۶}
بتای مربوط به حداقل خطا	۰/۰۱	۰/۰۱	۰/۰۱	۰/۰۱	۰/۰۱
میانگین خطا	۶/۰۸۲×۱۰ ^{-۲}	۴/۹۳۶×۱۰ ^{-۲}	۳/۹۰۵×۱۰ ^{-۲}	۳/۲۶۶×۱۰ ^{-۲}	۲/۶۶۶×۱۰ ^{-۲}
انحراف معیار خطا	۱/۵۰۹×۱۰ ^{-۱}	۸/۸۱۶×۱۰ ^{-۲}	۴/۴۸۱×۱۰ ^{-۲}	۲/۶۶۷×۱۰ ^{-۲}	۱/۵۶۶×۱۰ ^{-۲}

در شکل‌های (۳) الی (۱۲) نمودار میله‌ای میانگین خطای روش‌های مختلف به ازای $\Delta t=0/02$ تا $\Delta t=0/20$ ثانیه آورده شده است. لازم به ذکر است محور قائم نمودارهای میله‌ای، لگاریتمی معکوس می‌باشند، به عبارتی دیگر میله‌ای که بیشترین ارتفاع را دارد، دارای کمترین خطا است و با توجه به اینکه جذر میانگین مربعات خطا به عنوان معیار خطا انتخاب گردیده است، در نتیجه تمام مقادیر خطا، اعدادی مثبت می‌باشند. با دقت در نمودارهای میله‌ای شکل (۳) و اعداد متناظر با آن که مربوط به $\Delta t=0/02$ ثانیه می‌باشد، نتایج زیر قابل مشاهده است:

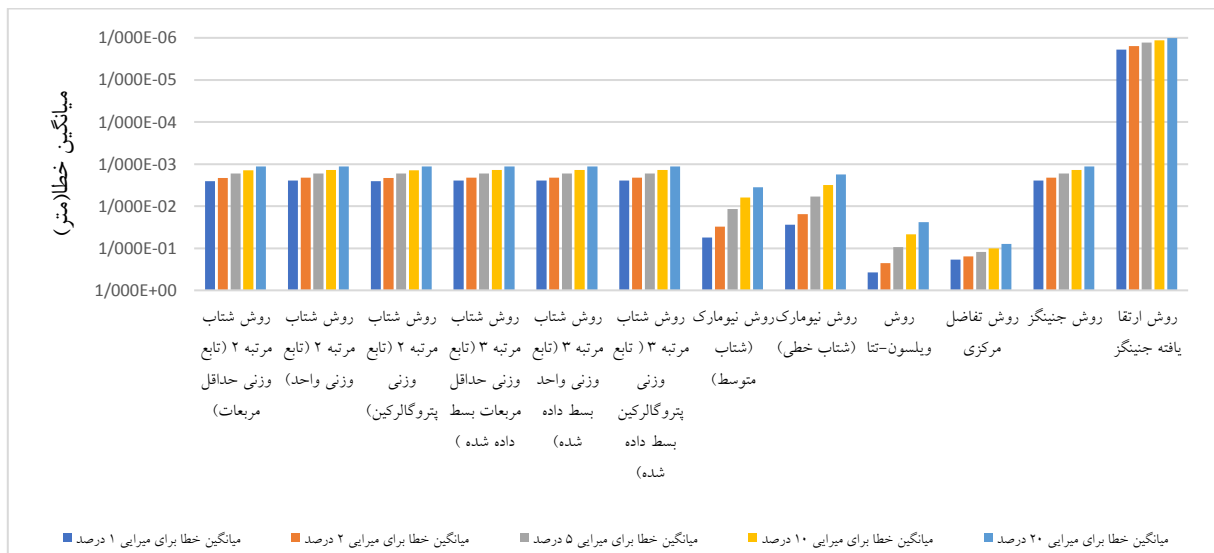
- با افزایش میزان میرایی، بدون استثناء، میانگین خطای روش‌های مختلف کاهش می‌یابد.
- در روش شتاب مرتبه دوم، مقادیر میانگین خطای روش حداقل مربعات و روش پتروگالرکین تا ۴ رقم اعشار دقیقاً یکسان بودند.
- در روش شتاب مرتبه سوم، مقادیر میانگین خطای روش حداقل مربعات و روش پتروگالرکین و نیز روش تابع وزنی واحد بسط داده شده تا ۴ رقم اعشار دقیقاً یکسان بودند.
- در روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی حداقل مربعات بسط داده شده) میانگین خطای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب برابر با $2/471 \times 10^{-3}$ ، $2/091 \times 10^{-3}$ ، $1/662 \times 10^{-3}$ ، $1/391 \times 10^{-3}$ و $1/139 \times 10^{-3}$ بود. مقادیر متناظر این اعداد برای روش شتاب مرتبه دوم به ترتیب اعداد 10^{-3}

۲/۵۴۳×۱۰^{-۳}، ۲/۱۲۸×۱۰^{-۳}، ۱/۶۷۶×۱۰^{-۳}، ۱/۳۹۷×۱۰^{-۳} و 10^{-3} × ۱/۱۴۳ بود. با مقایسه این دو سری اعداد، مشخص می‌شود که با افزایش مرتبه شتاب از ۲ به ۳ برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب ۲/۸۳، ۱/۷۴، ۰/۸۴، ۰/۴۳ و ۰/۳۵ درصد معیار خطا کاهش یافته است. میانگین کاهش خطا برای تمام میرایی‌ها ۱/۲۴ درصد می‌باشد که عدد کوچکی است.

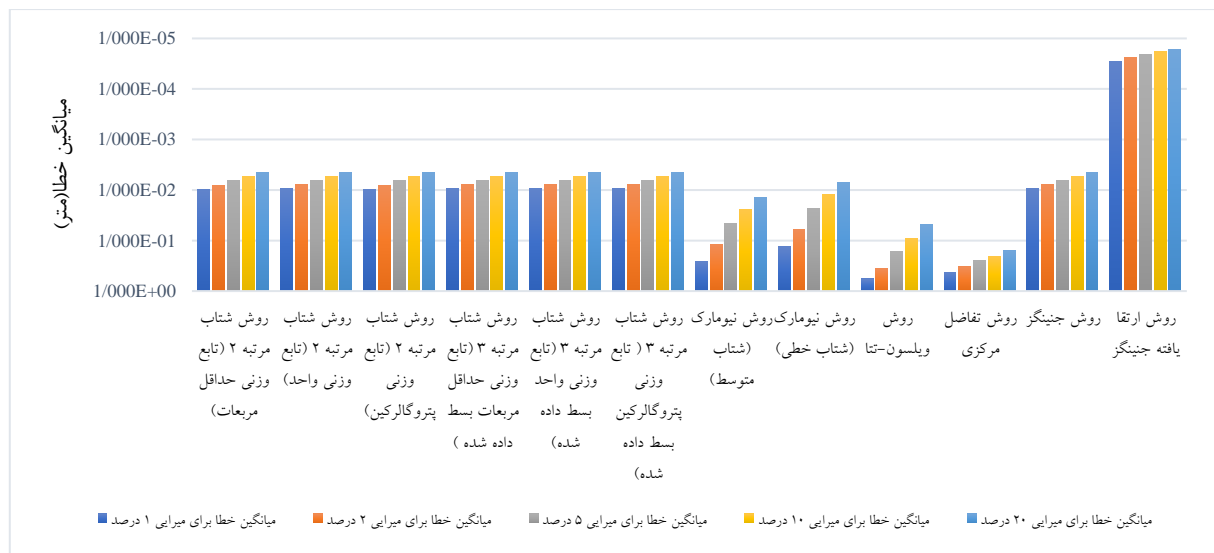
۵. کمینه‌ی میانگین خطا، مربوط به روش جنینگز ارتقا یافته است که برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب مقادیر $1/895 \times 10^{-6}$ ، $1/583 \times 10^{-6}$ ، $1/288 \times 10^{-6}$ ، $1/40 \times 10^{-6}$ و $1/018 \times 10^{-6}$ مشاهده گردید. این مقادیر به مراتب کمتر از خطای روش شتاب مرتبه سوم می‌باشد. یعنی میانگین پنج عدد فوق‌الذکر ۱۲۱۸ برابر کمتر از میانگین پنج خطای مربوط به روش شتاب مرتبه سوم (روش کمترین مربعات) است.

۶. مقادیر خطای روش ویلسون برای میرایی ۱ و ۲ درصد به ترتیب برابر با $3/764 \times 10^{-1}$ و $2/262 \times 10^{-1}$ می‌باشد که این مقادیر بیشترین میزان خطا در هشت روش مطرح شده در این تحقیق برای میرایی ۱ و ۲ درصد است. برای میرایی‌های ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد، روش تفاضل مرکزی، بیشینه‌ی میانگین خطا را دارد که خطاهای مربوط به میرایی‌های فوق‌الذکر به ترتیب $1/227 \times 10^{-1}$ ، $1/02 \times 10^{-1}$ و $7/891 \times 10^{-2}$ می‌باشند. میانگین بیشینه‌ی خطا برای پنج میرایی فوق‌الذکر برابر با $1/809 \times 10^{-1}$ است که این میانگین ۱۰۳ برابر میانگین خطای شتاب مرتبه سوم (روش حداقل مربعات) است.

نشریه مهندسی عمران فردوسی



شکل ۳ میانگین خطای روش‌های مختلف عددی برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد برای Δt برابر با ۰/۰۲ ثانیه



شکل ۴ میانگین خطای روش‌های مختلف عددی برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد برای Δt برابر با ۰/۰۴ ثانیه

واحد بسط داده شده، تا ۴ رقم اعشار دقیقاً یکسان بودند. ۴. در روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی حداقل مربعات بسط داده شده) میانگین خطا برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب برابر با $9/281 \times 10^{-3}$ ، $7/906 \times 10^{-3}$ ، $6/423 \times 10^{-3}$ و $5/434 \times 10^{-3}$ بود. مقادیر متناظر این اعداد برای روش شتاب مرتبه دوم به ترتیب اعداد $9/913 \times 10^{-3}$ ، $8/186 \times 10^{-3}$ ، $6/524 \times 10^{-3}$ و $5/483 \times 10^{-3}$ و $4/503 \times 10^{-3}$ بود. با مقایسه این دو سری اعداد، مشخص می‌شود که با افزایش مرتبه شتاب از ۲ به ۳ برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب ۲/۸۳، ۱/۷۴، ۰/۸۴، ۰/۴۳ و ۰/۳۵ درصد معیار خطا کاهش یافته است. میانگین

با دقت در نمودارهای میله‌ای شکل (۴) و اعداد متناظر با آن که مربوط به $\Delta t = 0/04$ ثانیه می‌باشد، نتایج زیر قابل مشاهده است:

- با افزایش میزان میرایی، بدون استثناء، میانگین خطای روش‌های مختلف کاهش می‌یابد.
- در روش شتاب مرتبه دوم، مقادیر میانگین خطای روش حداقل مربعات و روش پتروگالرکین تا ۳ رقم اعشار دقیقاً یکسان بودند. برای میرایی ۱۰ و ۲۰ درصد مقادیر خطای دو روش مذکور تا ۴ رقم اعشار دقیقاً یکسان بودند.
- در روش شتاب مرتبه سوم، مقادیر میانگین خطای روش حداقل مربعات و روش پتروگالرکین و نیز روش تابع وزنی

۱۰×۹۹۸/۹ بود. با مقایسه این دو سری اعداد، مشخص می‌شود که با افزایش مرتبه شتاب از ۲ به ۳ برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب ۹/۱۳، ۴/۸۴، ۲/۲۱، ۰/۷۲ و ۰/۲۳ درصد معیار خطا کاهش یافته است. میانگین کاهش خطا برای تمام میرایی‌ها ۳/۶۳ درصد می‌باشد که عدد کوچکی است.

۵. کمینه‌ی میانگین خطا، مربوط به روش جنینگز ارتقا یافته است که برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب مقادیر $۱۰^{-۴} \times ۱/۴۴۹$ ، $۱۰^{-۴} \times ۱/۲۵۵$ ، $۱۰^{-۴} \times ۱/۰۹۱$ ، $۱۰^{-۴} \times ۱/۰۰۲$ و $۱۰^{-۵} \times ۹/۱۷۲$ مشاهده گردید. این مقادیر به مراتب کمتر از خطای روش شتاب مرتبه سوم می‌باشد. یعنی میانگین پنج عدد فوق‌الذکر ۱۲۹ برابر کمتر از میانگین پنج خطای مربوط به روش شتاب مرتبه سوم (روش کمترین مربعات) است.

۶. روش تفاضل مرکزی، بیشینه میانگین خطا را در بین این هشت روش عددی داشته است که عدد مربوط به این خطاها برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ به ترتیب $۱۰^{-۱} \times ۷/۰۰۳$ ، $۱۰^{-۱} \times ۵/۲۷۰$ ، $۱۰^{-۱} \times ۳/۹۰۵$ ، $۱۰^{-۱} \times ۳/۱۲۴$ و $۱۰^{-۱} \times ۲/۴۳۰$ است. میانگین بیشینه‌ی خطا برای پنج میرایی فوق‌الذکر برابر با $۱۰^{-۱} \times ۳/۰۹$ است که این میانگین ۳۰ برابر میانگین خطای شتاب مرتبه سوم (روش حداقل مربعات) است.

با دقت در نمودارهای میله‌ای شکل (۶) و اعداد متناظر با آن که مربوط به $\Delta t = ۰/۰۸$ ثانیه می‌باشد، نتایج زیر قابل مشاهده است:

۱. با افزایش میزان میرایی، بدون استثناء، میانگین خطای روش‌های مختلف کاهش می‌یابد.

۲. در روش شتاب مرتبه دوم، مقادیر میانگین خطای روش حداقل مربعات و روش پتروگالرکین تا ۳ رقم اعشار دقیقاً یکسان بودند.

۳. در روش شتاب مرتبه سوم، مقادیر میانگین خطای روش حداقل مربعات و روش پتروگالرکین و نیز روش تابع وزنی واحد بسط داده شده تا ۴ رقم اعشار دقیقاً یکسان بودند و با مقادیر میانگین خطای روش تابع وزنی واحد تا ۳ رقم اعشار دقیقاً یکسان بودند.

۴. در روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی حداقل مربعات بسط داده شده) میانگین خطا برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب برابر با $۱۰^{-۲} \times ۳/۴۷۵$ ، $۱۰^{-۲} \times ۳/۰۰۵$ ، $۱۰^{-۲} \times ۲/۴۷۲$ ، $۱۰^{-۲} \times ۲/۰۹۹$ و $۱۰^{-۲} \times ۱/۷۳۱$ بود. مقادیر متناظر این

کمینه‌ی خطا برای تمام میرایی‌ها ۱/۲۴ درصد می‌باشد که عدد کوچکی است.

۵. کمینه‌ی میانگین خطا، مربوط به روش جنینگز ارتقا یافته است که برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب مقادیر $۱۰^{-۵} \times ۲/۸۰۳$ ، $۱۰^{-۵} \times ۲/۳۸۷$ ، $۱۰^{-۵} \times ۲/۰۳۴$ ، $۱۰^{-۵} \times ۱/۸۴۸$ و $۱۰^{-۵} \times ۱/۶۷۹$ مشاهده گردید. این مقادیر به مراتب کمتر از خطای روش شتاب مرتبه سوم می‌باشد. یعنی میانگین پنج عدد فوق‌الذکر، ۳۱۲ برابر کمتر از میانگین پنج خطای مربوط به روش شتاب مرتبه سوم (روش کمترین مربعات) است.

۶. مقادیر خطای روش ویلسون برای میرایی ۱ و ۲ درصد، به ترتیب برابر با $۱۰^{-۱} \times ۵/۷۵۴$ و $۱۰^{-۱} \times ۳/۵۳۹$ می‌باشد که این مقادیر بیشترین میزان خطا در هشت روش مطرح شده در این تحقیق برای میرایی ۱ و ۲ درصد است. برای میرایی‌های ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد، روش تفاضل مرکزی، بیشینه‌ی میانگین خطا را دارد که خطاهای مربوط به میرایی‌های فوق‌الذکر به ترتیب $۱۰^{-۱} \times ۲/۵۲۷$ ، $۱۰^{-۱} \times ۲/۰۴۲$ و $۱۰^{-۱} \times ۱/۵۹۹$ می‌باشند. میانگین بیشینه‌ی خطا برای پنج میرایی فوق‌الذکر برابر با $۱۰^{-۱} \times ۳/۰۹$ است که این میانگین ۴۶ برابر میانگین خطای شتاب مرتبه سوم (روش حداقل مربعات) است.

با دقت در نمودارهای میله‌ای شکل (۵) و اعداد متناظر با آن که مربوط به $\Delta t = ۰/۰۶$ ثانیه می‌باشد، نتایج زیر قابل مشاهده است:

۱. با افزایش میزان میرایی، بدون استثناء، میانگین خطای روش‌های مختلف کاهش می‌یابد.

۲. در روش شتاب مرتبه دوم، مقادیر میانگین خطای روش حداقل مربعات و روش پتروگالرکین تا ۳ رقم اعشار دقیقاً یکسان بودند.

۳. در روش شتاب مرتبه سوم، مقادیر میانگین خطای روش حداقل مربعات و روش پتروگالرکین و نیز روش تابع وزنی واحد بسط داده شده تا ۴ رقم اعشار دقیقاً یکسان بودند و با مقادیر میانگین خطای روش تابع وزنی واحد تا ۳ رقم اعشار دقیقاً یکسان بودند.

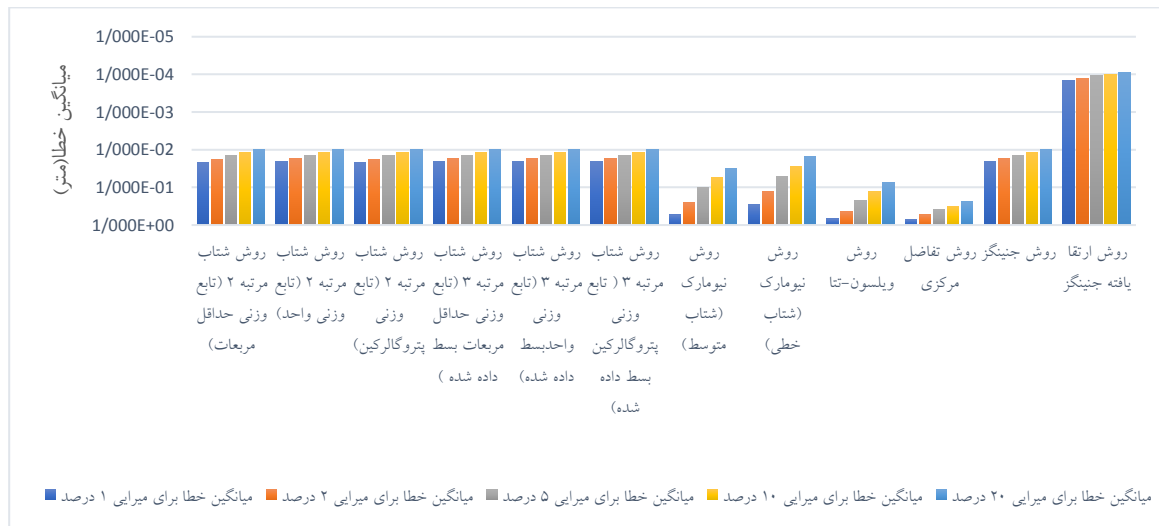
۴. در روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی حداقل مربعات بسط داده شده) میانگین خطا برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب برابر با $۱۰^{-۲} \times ۲/۰۱۰$ ، $۱۰^{-۲} \times ۱/۷۲۹$ ، $۱۰^{-۲} \times ۱/۴۱۷$ ، $۱۰^{-۲} \times ۱/۲۰۳$ و $۱۰^{-۳} \times ۹/۹۲۶$ بود. مقادیر متناظر این اعداد برای روش شتاب مرتبه دوم به ترتیب اعداد $۱۰^{-۲} \times ۲/۲۱۲$ ، $۱۰^{-۲} \times ۱/۸۱۷$ ، $۱۰^{-۲} \times ۱/۴۴۹$ ، $۱۰^{-۲} \times ۱/۲۱۸$ و $۱۰^{-۳}$

اعداد برای روش شتاب مرتبه دوم به ترتیب اعداد $۱۰^{-۲}$ ، $۳/۹۱۷ \times ۱۰^{-۲}$ ، $۲/۵۴۲ \times ۱۰^{-۲}$ ، $۲/۱۳۳ \times ۱۰^{-۲}$ و $۳/۴۹۵ \times ۱۰^{-۲}$ و مشاهده گردید. این مقادیر به مراتب کمتر از خطای روش شتاب مرتبه سوم می باشد. یعنی میانگین پنج عدد فوق الذکر ۶۹ برابر کمتر از میانگین پنج خطای مربوط به روش شتاب مرتبه سوم (روش کمترین مربعات) است.

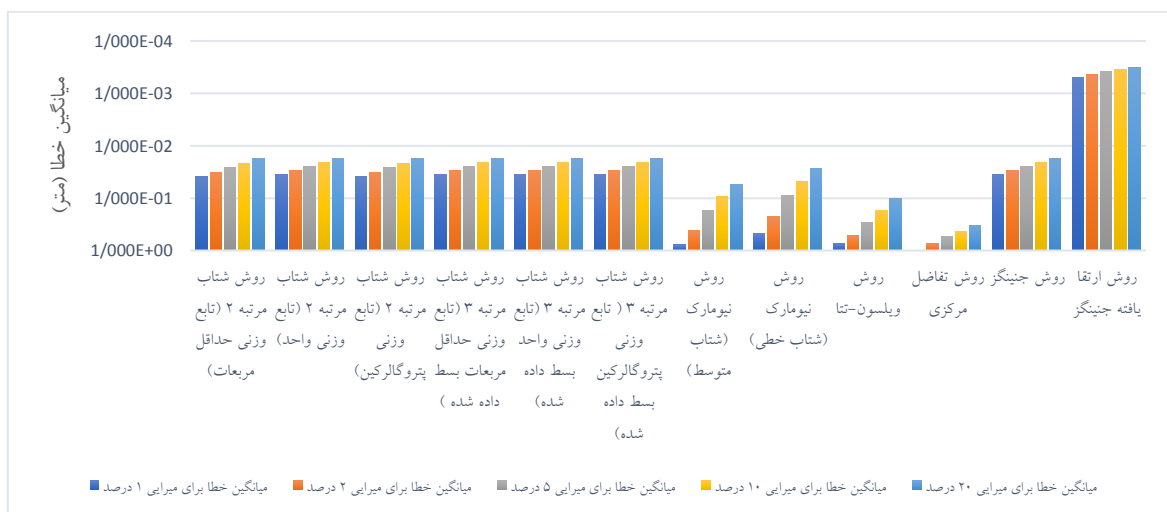
۶. روش تفاضل مرکزی، بیشینه میانگین خطا را در بین این هشت روش عددی داشته است که عدد مربوط به این خطا ها برای میرایی های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ به ترتیب $۷/۳۹۸ \times ۱۰^{-۱}$ ، $۵/۳۷۱ \times ۱۰^{-۱}$ ، $۴/۲۵۶ \times ۱۰^{-۱}$ و $۳/۲۹۰ \times ۱۰^{-۱}$ است. میانگین بیشینه خطا برای پنج میرایی فوق الذکر برابر با $۳/۰۹ \times ۱۰^{-۱}$ است که این میانگین خطای شتاب مرتبه سوم (روش حداقل مربعات) است.

۵. کمینه میانگین خطا، مربوط به روش جینگز ارتقا یافته است که برای میرایی های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب مقادیر $۴/۹۴۸ \times ۱۰^{-۴}$ ، $۴/۳۱۷ \times ۱۰^{-۴}$ ، $۳/۷۸۵ \times ۱۰^{-۴}$ ، $۱/۷۴۷ \times ۱۰^{-۴}$ بود که با مقایسه این دو سری اعداد، مشخص می شود که با افزایش مرتبه شتاب از ۲ به ۳ برای میرایی های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب ۱۱/۲۸، ۶/۰۱، ۲/۷۵، ۱/۵۹ و ۰/۹۶ درصد معیار خطا کاهش یافته است. کاهش خطا برای تمام میرایی ها ۴/۵۲ درصد می باشد که عدد کوچکی است.

۵. کمینه میانگین خطا، مربوط به روش جینگز ارتقا یافته است که برای میرایی های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب مقادیر $۴/۹۴۸ \times ۱۰^{-۴}$ ، $۴/۳۱۷ \times ۱۰^{-۴}$ ، $۳/۷۸۵ \times ۱۰^{-۴}$ ، $۱/۷۴۷ \times ۱۰^{-۴}$ بود که با مقایسه این دو سری اعداد، مشخص می شود که با افزایش مرتبه شتاب از ۲ به ۳ برای میرایی های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب ۱۱/۲۸، ۶/۰۱، ۲/۷۵، ۱/۵۹ و ۰/۹۶ درصد معیار خطا کاهش یافته است. کاهش خطا برای تمام میرایی ها ۴/۵۲ درصد می باشد که عدد کوچکی است.



شکل ۵ میانگین خطای روش های مختلف عددی برای میرایی های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد برای Δt برابر با ۰/۰۶ ثانیه



شکل ۶ میانگین خطای روش های مختلف عددی برای میرایی های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد برای Δt برابر با ۰/۰۸ ثانیه

با دقت در نمودارهای میله‌ای شکل (۸) و اعداد متناظر با آن که مربوط به $\Delta t=0/12$ ثانیه می‌باشد، نتایج زیر قابل مشاهده است:

۱. با افزایش میزان میرایی، بدون استثناء، میانگین خطای روش‌های مختلف کاهش می‌یابد.

۲. در روش شتاب مرتبه دوم، مقادیر میانگین خطای روش حداقل مربعات و روش پتروگالرکین تا رقم اعشار دقیقاً یکسان بودند.

۳. در روش شتاب مرتبه سوم، مقادیر میانگین خطای روش حداقل مربعات و روش پتروگالرکین بسط داده شده تا رقم اعشار دقیقاً یکسان بودند و با مقادیر میانگین خطای روش تابع وزنی واحد تا رقم اعشار دقیقاً یکسان بودند.

۴. در روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی حداقل مربعات بسط داده شده) میانگین خطای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب برابر با $7/445 \times 10^{-2}$ ، $6/453 \times 10^{-2}$ ، $5/302$ ، $4/485 \times 10^{-2}$ و $3/676 \times 10^{-2}$ مقادیر متناظر این اعداد برای روش شتاب مرتبه دوم به ترتیب اعداد $8/665 \times 10^{-2}$ ، $6/994 \times 10^{-2}$ ، $5/500 \times 10^{-2}$ و $4/579 \times 10^{-2}$ بودند که با مقایسه این دو سری اعداد مشخص می‌شود که با افزایش مرتبه شتاب از ۲ به ۳ برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ به ترتیب $14/08$ ، $7/73$ ، $3/60$ ، $2/05$ و $1/18$ درصد، معیار خطا کاهش یافته است. کمینه‌ی میانگین خطا برای تمام میرایی‌ها $5/73$ درصد می‌باشد که عدد کوچکی است.

۵. کمینه‌ی میانگین خطا مربوط به روش جینگز ارتقا یافته است که برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ به ترتیب خطاهای $3/207 \times 10^{-3}$ ، $2/773 \times 10^{-3}$ ، $2/416 \times 10^{-3}$ ، $2/232 \times 10^{-3}$ و $2/067 \times 10^{-3}$ مشاهده گردید. این مقادیر به مراتب کمتر از خطای روش شتاب مرتبه سوم می‌باشد. یعنی میانگین پنج عدد فوق‌الذکر ۲۲ برابر کمتر از میانگین پنج خطای مربوط به روش شتاب مرتبه سوم (روش کمترین مربعات) است.

۶. روش تفاضل مرکزی، بیشینه میانگین خطا را در بین این هشت روش عددی داشته است که عدد مربوط به این خطاها برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ به ترتیب $1/539$ ، $1/199$ ، 10^{-1} ، $8/595 \times 10^{-1}$ و $6/708 \times 10^{-1}$ است. میانگین بیشینه‌ی خطای پنج میرایی فوق‌الذکر برابر با $9/563 \times 10^{-1}$ است که این میانگین ۱۷ برابر میانگین خطای شتاب مرتبه سوم (روش حداقل مربعات) است.

با دقت در نمودارهای میله‌ای شکل (۷) و اعداد متناظر با آن که مربوط به $\Delta t=0/1$ ثانیه می‌باشد، نتایج زیر قابل مشاهده است: ۱. با افزایش میزان میرایی، بدون استثناء، میانگین خطای روش‌های مختلف کاهش می‌یابد.

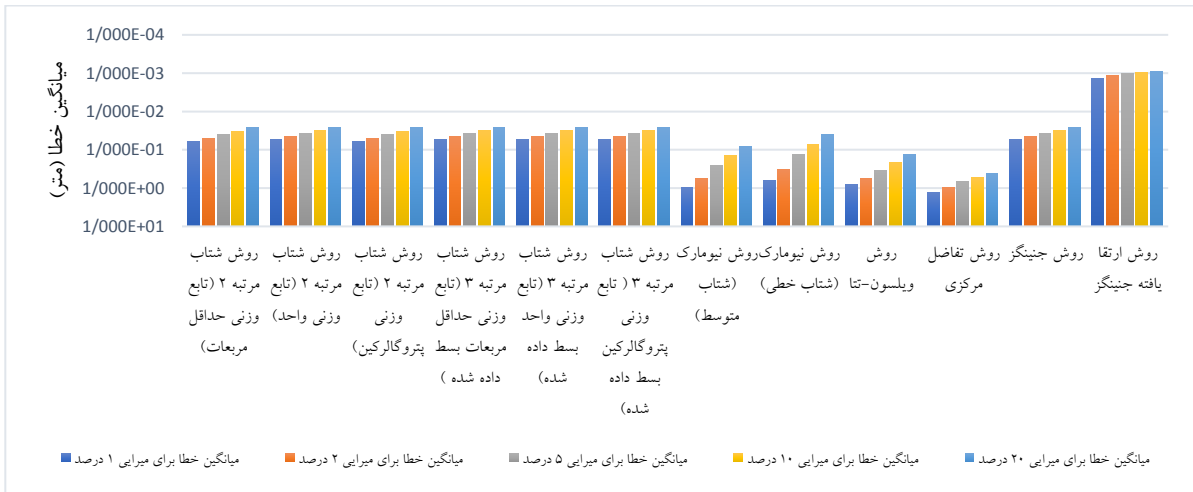
۲. در روش شتاب مرتبه دوم، مقادیر میانگین خطای روش حداقل مربعات و روش پتروگالرکین تا رقم اعشار دقیقاً یکسان بودند.

۳. در روش شتاب مرتبه سوم، مقادیر میانگین خطای روش حداقل مربعات و روش پتروگالرکین و نیز روش تابع وزنی واحد بسط داده شده تا رقم اعشار دقیقاً یکسان بودند و با مقادیر میانگین خطای روش تابع وزنی واحد تا رقم اعشار دقیقاً یکسان بودند.

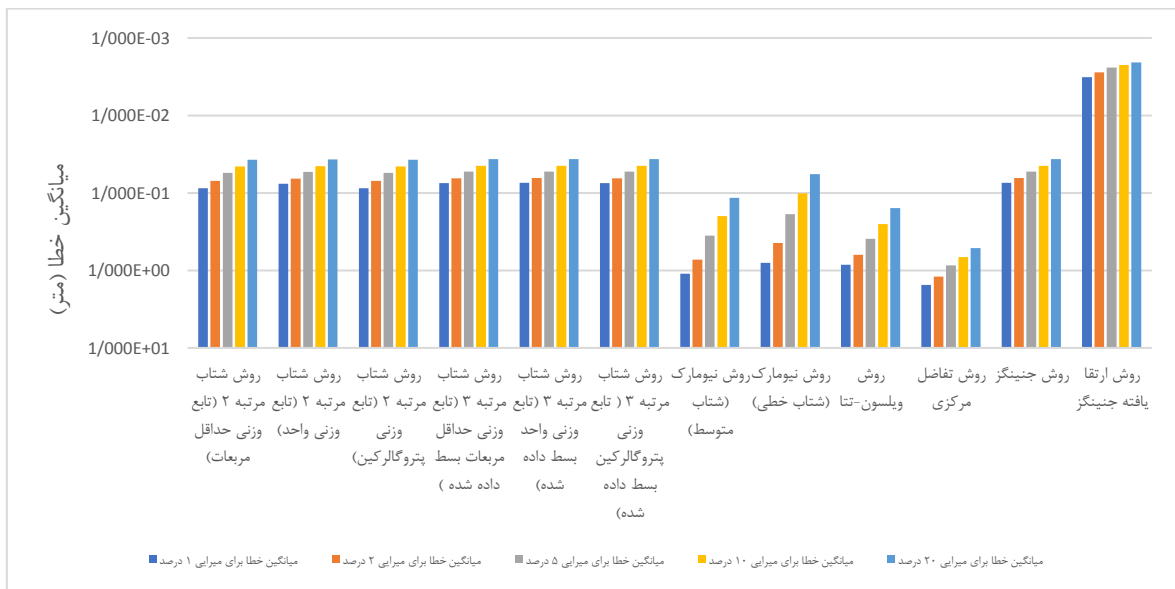
۴. در روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی حداقل مربعات بسط داده شده) میانگین خطای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب برابر با $5/298 \times 10^{-2}$ ، $4/592 \times 10^{-2}$ ، $3/780$ ، $3/780$ ، $3/206 \times 10^{-2}$ و $2/638 \times 10^{-2}$ بود. مقادیر متناظر این اعداد برای روش شتاب مرتبه دوم به ترتیب اعداد $6/082 \times 10^{-2}$ ، $4/936 \times 10^{-2}$ ، $3/905 \times 10^{-2}$ و $3/266 \times 10^{-2}$ بودند که با مقایسه این دو سری اعداد مشخص می‌شود که با افزایش مرتبه شتاب از ۲ به ۳ برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ به ترتیب $12/89$ ، $6/97$ ، $3/20$ ، $1/84$ و $1/05$ درصد معیار خطا کاهش یافته است. میانگین کمینه‌ی خطا برای تمام میرایی‌ها $5/19$ درصد می‌باشد که عدد کوچکی است.

۵. کمینه‌ی میانگین خطا مربوط به روش جینگز ارتقا یافته است که برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ به ترتیب خطاهای $1/352 \times 10^{-3}$ ، $1/179 \times 10^{-3}$ ، $1/035 \times 10^{-3}$ ، $9/574 \times 10^{-3}$ و $8/846 \times 10^{-3}$ مشاهده گردید. این مقادیر به مراتب کمتر از خطای روش شتاب مرتبه سوم می‌باشد. یعنی میانگین پنج عدد فوق‌الذکر ۳۶ برابر کمتر از میانگین پنج خطای مربوط به روش شتاب مرتبه سوم (روش کمترین مربعات) است.

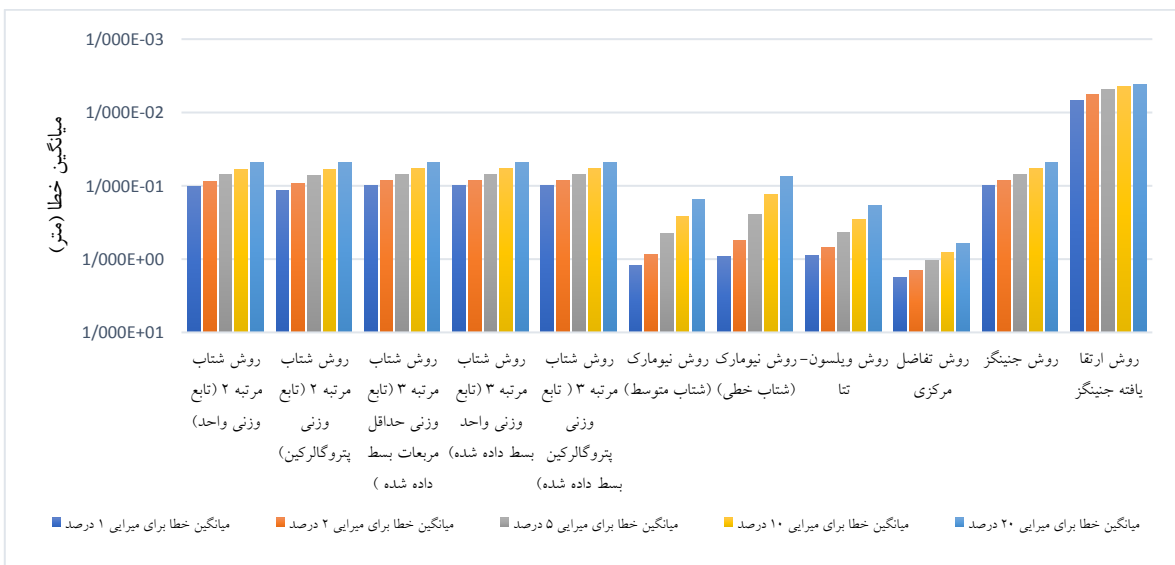
۶. روش تفاضل مرکزی، بیشینه میانگین خطا را در بین این هشت روش عددی داشته است که عدد مربوط به این خطاها برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ به ترتیب $1/279$ ، 10^{-1} ، $9/665 \times 10^{-1}$ ، $6/933 \times 10^{-1}$ و $5/447 \times 10^{-1}$ است. میانگین بیشینه‌ی خطا، برای پنج میرایی فوق‌الذکر برابر با $7/804 \times 10^{-1}$ است که این میانگین ۲۰ برابر میانگین خطای شتاب مرتبه سوم (روش حداقل مربعات) است.



شکل ۷ میانگین خطای روش های مختلف عددی برای میرایی های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد برای Δt برابر با ۰/۱ ثانیه

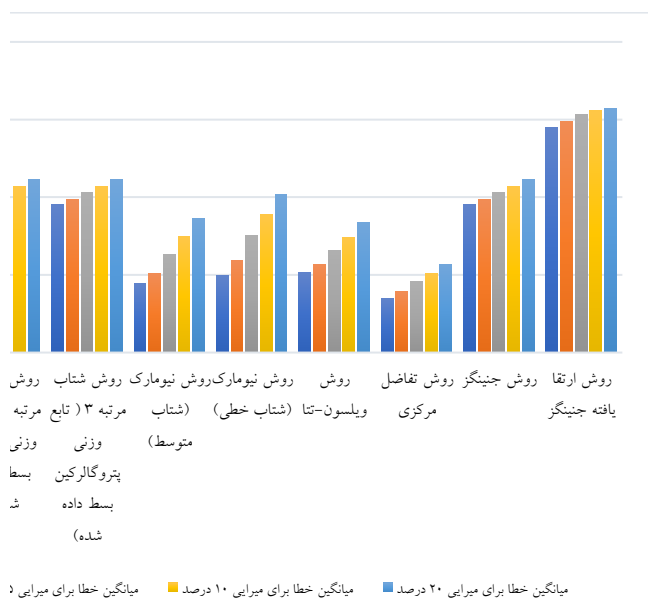


شکل ۸ میانگین خطای روش های مختلف عددی برای میرایی های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد برای Δt برابر با ۰/۱۲ ثانیه



شکل ۹ میانگین خطای روش های مختلف عددی برای میرایی های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد برای Δt برابر با ۰/۱۴ ثانیه

میانگین ۱۶ برابر میانگین خطای شتاب مرتبه سوم (روش حداقل مربعات) است.



شکل ۱۰ میانگین خطای روش‌های مختلف عددی برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد برای Δt برابر با ۰/۱۶ ثانیه

با دقت در نمودارهای میله‌ای شکل (۱۰) و اعداد متناظر با آن که مربوط به $\Delta t = 0/16$ ثانیه می‌باشد، نتایج زیر قابل مشاهده است:

۱. با افزایش میزان میرایی، بدون استثناء، میانگین خطای روش‌های مختلف کاهش می‌یابد.
۲. در روش شتاب مرتبه دوم، مقادیر میانگین خطای روش حداقل مربعات و روش پتروگالرکین تا ۳ رقم اعشار دقیقاً یکسان بودند.
۳. در روش شتاب مرتبه سوم، مقادیر میانگین خطای روش حداقل مربعات و روش پتروگالرکین تا ۳ رقم اعشار دقیقاً یکسان بودند.
۴. در روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی حداقل مربعات بسط داده شده) میانگین خطا برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب برابر با $1/251 \times 10^{-1}$ ، $1/1077 \times 10^{-1}$ ، $8/734 \times 10^{-2}$ و $7/300 \times 10^{-2}$ بود. مقادیر متناظر این اعداد برای روش شتاب مرتبه دوم به ترتیب اعداد $1/480 \times 10^{-1}$ ، $1/181 \times 10^{-1}$ ، $9/121 \times 10^{-2}$ و $7/486 \times 10^{-2}$ است که با مقایسه این دو سری اعداد مشخص می‌شود

با دقت در نمودارهای میله‌ای شکل (۹) و اعداد متناظر با آن که مربوط به $\Delta t = 0/14$ ثانیه می‌باشد، نتایج زیر قابل مشاهده است:

۱. با افزایش میزان میرایی، بدون استثناء، میانگین خطای روش‌های مختلف کاهش می‌یابد.
۲. در روش شتاب مرتبه دوم، مقادیر میانگین خطای روش حداقل مربعات و روش پتروگالرکین مقادیر خطای دو روش مذکور تا ۳ رقم اعشار دقیقاً یکسان بودند.
۳. در روش شتاب مرتبه سوم، مقادیر میانگین خطای روش حداقل مربعات و روش پتروگالرکین تا ۴ رقم اعشار دقیقاً یکسان بودند و با مقادیر میانگین خطای روش تابع وزنی واحد تا ۲ رقم اعشار دقیقاً یکسان بودند.
۴. در روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی حداقل مربعات بسط داده شده) میانگین خطا برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب برابر با $9/868 \times 10^{-2}$ ، $8/534 \times 10^{-2}$ ، $6/979 \times 10^{-2}$ و $5/877 \times 10^{-2}$ بود. مقادیر متناظر این اعداد برای روش شتاب مرتبه دوم به ترتیب اعداد $1/160 \times 10^{-2}$ ، $9/310 \times 10^{-2}$ ، $7/266 \times 10^{-2}$ و $6/014 \times 10^{-2}$ بودند که با مقایسه این دو سری اعداد مشخص می‌شود که با افزایش مرتبه شتاب از ۲ به ۳ برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ به ترتیب ۹۳/۱۴، ۸/۳۳، ۴/۰۵، ۲/۲۸ و ۱/۲۸ درصد معیار خطا کاهش یافته است. میانگین کاهش خطا برای تمام میرایی‌ها ۶/۱۷ درصد می‌باشد که عدد کوچکی است.
۵. کمینه‌ی میانگین خطا مربوط به روش جنینگر ارتقا یافته است که برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ به ترتیب خطاهای $6/775 \times 10^{-3}$ ، $5/747 \times 10^{-3}$ ، $4/902 \times 10^{-3}$ و $4/484 \times 10^{-3}$ است. مشاهده گردید. این مقادیر به مراتب کمتر از خطای روش شتاب مرتبه سوم می‌باشد. یعنی میانگین پنج عدد فوق‌الذکر ۱۴ برابر کمتر از میانگین پنج خطای مربوط به روش شتاب مرتبه سوم (روش کمترین مربعات) است.
۶. روش تفاضل مرکزی، بیشینه‌ی میانگین خطا را در بین این هشت روش عددی داشته است که عدد مربوط به این خطاها برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ به ترتیب $1/773$ ، $1/429$ ، $1/036$ ، $8/059 \times 10^{-1}$ و $6/150 \times 10^{-1}$ است. میانگین بیشینه‌ی خطا برای پنج میرایی فوق‌الذکر برابر با ۱/۱۳ است که این

۱۰×۷/۰۸۰ که با مقایسه این دو سری اعداد مشخص می‌شود که با افزایش مرتبه شتاب از ۲ به ۳ برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ به ترتیب ۱۵/۷۶، ۹/۱۵، ۴/۵۵، ۲/۶۸ و ۱/۵۱ درصد معیار خطا کاهش یافته است. میانگین کاهش خطا برای تمام میرایی‌ها ۶/۷۳ درصد می‌باشد که عدد کوچکی است.

۵. کمینه‌ی میانگین خطا مربوط به روش جنینگر ارتقا یافته است که برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ به ترتیب خطاهای $۱۰^{-۲} \times ۱/۲۸۳$ ، $۱۰^{-۲} \times ۱/۰۵۴$ ، $۱۰^{-۳} \times ۸/۶۱۰$ ، $۱۰^{-۳} \times ۷/۶۸۱$ و $۱۰^{-۲} \times ۲/۲۱۷$ ، $۱۰^{-۲} \times ۱/۷۷۰$ ، $۱۰^{-۲} \times ۱/۳۸۳$ و $۱۰^{-۲} \times ۱/۲۰۵$ و $۱۰^{-۲} \times ۱/۱۴۱$ مشاهده گردید. این مقادیر به مراتب کمتر از خطای روش شتاب مرتبه سوم می‌باشد. یعنی میانگین پنج عدد فوق‌الذکر، ۷ برابر کمتر از میانگین پنج خطای مربوط به روش شتاب مرتبه سوم (روش کمترین مربعات) است.

۶. روش تفاضل مرکزی، بیشینه‌ی میانگین خطا را در بین این هشت روش عددی داشته است که عدد مربوط به این خطاها برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ به ترتیب ۱/۹۹۰، ۱/۶۵۳، ۱/۲۲۴، $۱۰^{-۱} \times ۹/۵۲۵$ و $۱۰^{-۱} \times ۷/۲۶۲$ است میانگین بیشینه‌ی خطا برای پنج میرایی فوق‌الذکر برابر با ۱/۳۱ است که این میانگین ۱۴ برابر میانگین خطای شتاب مرتبه سوم (روش حداقل مربعات) است.

با دقت در نمودارهای میله‌ای شکل (۱۱) و اعداد متناظر با آن که مربوط به $\Delta t = 0/18$ ثانیه می‌باشد، نتایج زیر قابل مشاهده است:

۱. با افزایش میزان میرایی، بدون استثناء، میانگین خطای روش‌های مختلف کاهش می‌یابد.

۲. در روش شتاب مرتبه دوم، مقادیر میانگین خطای روش حداقل مربعات و روش پتروگالرکین تا ۳ رقم اعشار دقیقاً یکسان بودند.

۳. در روش شتاب مرتبه سوم، مقادیر میانگین خطای روش حداقل مربعات و روش پتروگالرکین تا ۴ رقم اعشار دقیقاً یکسان بودند و با مقادیر میانگین خطای روش تابع وزنی واحد تا ۲ رقم اعشار دقیقاً یکسان بودند.

۴. در روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی حداقل مربعات بسط داده شده) میانگین خطا برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب برابر با $۱۰^{-۱} \times ۱/۵۳۴$ ، $۱۰^{-۱} \times ۱/۳۱۰$ ، $۱۰^{-۲} \times ۱/۰۴۹$ ، $۱۰^{-۲} \times ۸/۶۷۲$ و $۱۰^{-۲} \times ۶/۹۷۳$ بود. مقادیر متناظر این اعداد برای روش شتاب مرتبه دوم به ترتیب اعداد $۱۰^{-۱} \times ۱/۸۲۱$ ، $۱۰^{-۱} \times ۱/۴۴۲$ ، $۱۰^{-۱} \times ۱/۰۹۹$ ، $۱۰^{-۲} \times ۸/۹۱۱$ و $۱۰^{-۲} \times ۷/۰۸۰$ که با مقایسه این دو سری اعداد مشخص می‌شود که با افزایش مرتبه شتاب از ۲ به ۳ برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ به ترتیب ۱۵/۷۶، ۹/۱۵، ۴/۵۵، ۲/۶۸ و ۱/۵۱ درصد معیار خطا کاهش یافته است. میانگین کاهش خطا برای تمام میرایی‌ها ۶/۷۳ درصد می‌باشد که عدد کوچکی است.

۵. کمینه‌ی میانگین خطا مربوط به روش جنینگر ارتقا یافته است که برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ به ترتیب خطاهای $۱۰^{-۲} \times ۱/۲۸۳$ ، $۱۰^{-۲} \times ۱/۰۵۴$ ، $۱۰^{-۳} \times ۸/۶۱۰$ ، $۱۰^{-۳} \times ۷/۶۸۱$ و $۱۰^{-۲} \times ۲/۲۱۷$ ، $۱۰^{-۲} \times ۱/۷۷۰$ ، $۱۰^{-۲} \times ۱/۳۸۳$ و $۱۰^{-۲} \times ۱/۲۰۵$ و $۱۰^{-۲} \times ۱/۱۴۱$ مشاهده گردید. این مقادیر به مراتب کمتر از خطای روش شتاب مرتبه سوم می‌باشد. یعنی میانگین پنج عدد فوق‌الذکر، ۷ برابر کمتر از میانگین پنج خطای مربوط به روش شتاب مرتبه سوم (روش کمترین مربعات) است.

۶. روش تفاضل مرکزی، بیشینه‌ی میانگین خطا را در بین این هشت روش عددی داشته است که عدد مربوط به این خطاها برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ به ترتیب ۱/۹۹۰، ۱/۶۵۳، ۱/۲۲۴، $۱۰^{-۱} \times ۹/۵۲۵$ و $۱۰^{-۱} \times ۷/۲۶۲$ است میانگین بیشینه‌ی خطا برای پنج میرایی فوق‌الذکر برابر با ۱/۳۱ است که این میانگین ۱۴ برابر میانگین خطای شتاب مرتبه سوم (روش حداقل مربعات) است.

با دقت در نمودارهای میله‌ای شکل (۱۱) و اعداد متناظر با آن که مربوط به $\Delta t = 0/18$ ثانیه می‌باشد، نتایج زیر قابل مشاهده است:

۱. با افزایش میزان میرایی، بدون استثناء، میانگین خطای روش‌های مختلف کاهش می‌یابد.

۲. در روش شتاب مرتبه دوم، مقادیر میانگین خطای روش حداقل مربعات و روش پتروگالرکین تا ۳ رقم اعشار دقیقاً یکسان بودند.

۳. در روش شتاب مرتبه سوم، مقادیر میانگین خطای روش حداقل مربعات و روش پتروگالرکین تا ۴ رقم اعشار دقیقاً یکسان بودند و با مقادیر میانگین خطای روش تابع وزنی واحد تا ۲ رقم اعشار دقیقاً یکسان بودند.

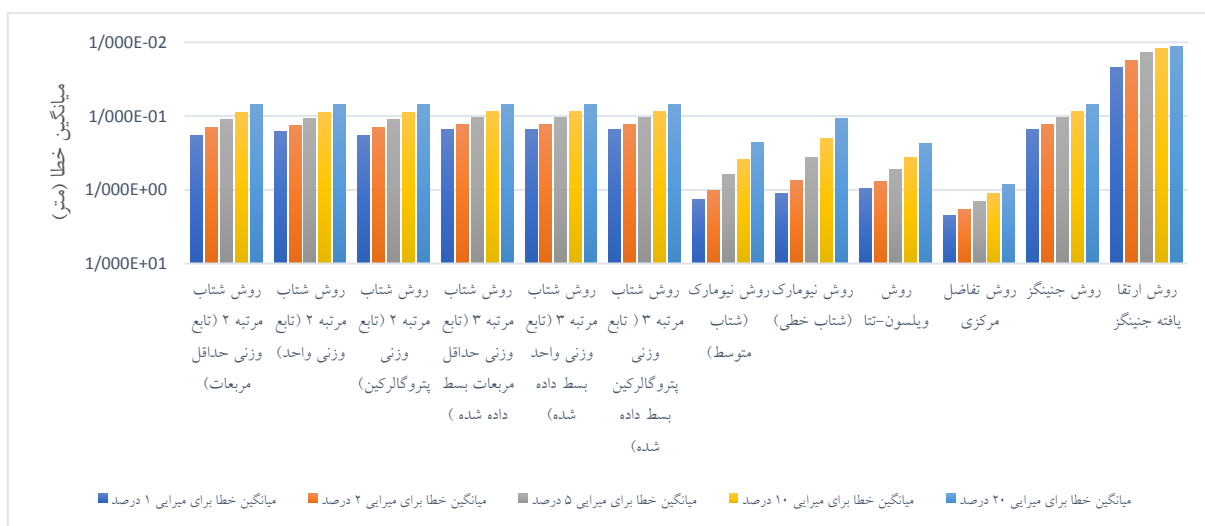
۴. در روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی حداقل مربعات بسط داده شده) میانگین خطا برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب برابر با $۱۰^{-۱} \times ۱/۵۳۴$ ، $۱۰^{-۱} \times ۱/۳۱۰$ ، $۱۰^{-۲} \times ۱/۰۴۹$ ، $۱۰^{-۲} \times ۸/۶۷۲$ و $۱۰^{-۲} \times ۶/۹۷۳$ بود. مقادیر متناظر این اعداد برای روش شتاب مرتبه دوم به ترتیب اعداد $۱۰^{-۱} \times ۱/۸۲۱$ ، $۱۰^{-۱} \times ۱/۴۴۲$ ، $۱۰^{-۱} \times ۱/۰۹۹$ ، $۱۰^{-۲} \times ۸/۹۱۱$ و $۱۰^{-۲} \times ۷/۰۸۰$ که با مقایسه این دو سری اعداد مشخص می‌شود که با افزایش مرتبه شتاب از ۲ به ۳ برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ به ترتیب ۱۵/۷۶، ۹/۱۵، ۴/۵۵، ۲/۶۸ و ۱/۵۱ درصد معیار خطا کاهش یافته است. میانگین کاهش خطا برای تمام میرایی‌ها ۶/۷۳ درصد می‌باشد که عدد کوچکی است.

خطای روش شتاب مرتبه سوم می‌باشد. یعنی میانگین پنج عدد فوق‌الذکر ۵ برابر کمتر از میانگین پنج خطای مربوط به روش شتاب مرتبه سوم (روش کمترین مربعات) است.

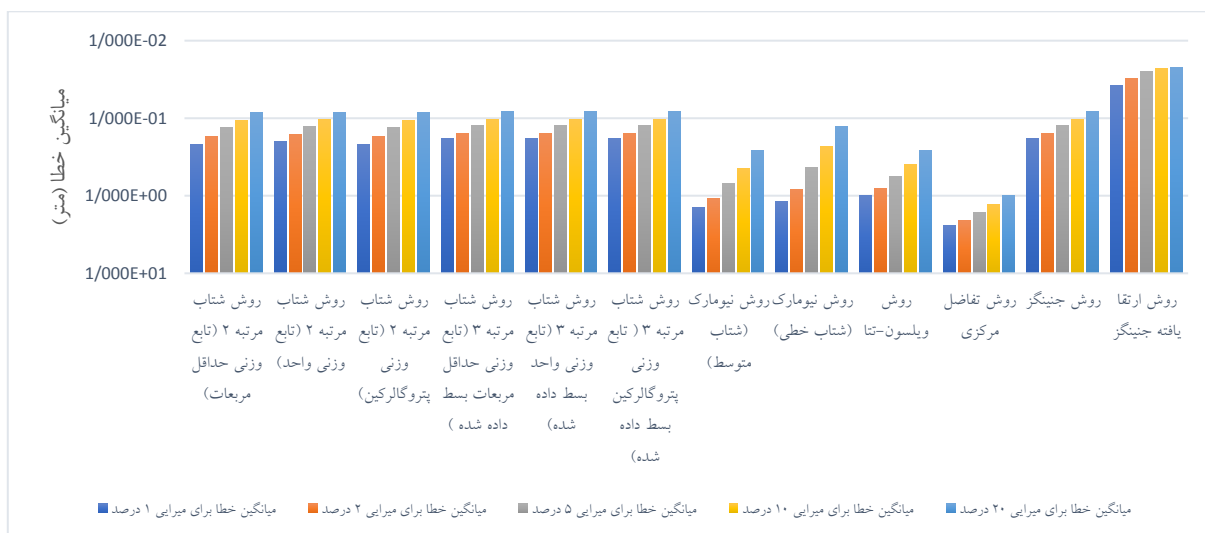
۶. روش تفاضل مرکزی، بیشینه‌ی میانگین خطا را در بین این هشت روش عددی داشته است که عدد مربوط به این خطاها برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ به ترتیب ۲/۱۰۰، ۱/۶۴۴، ۱/۳۰۳ و ۱/۰۰۳ است. میانگین خطاهای حداکثر برای پنج میرایی فوق‌الذکر، برابر با ۱/۶۹۶ است که این میانگین ۱۳ برابر میانگین خطای شتاب مرتبه سوم (روش حداقل مربعات) است.

$2/195 \times 10^{-1}$ ، $1/332 \times 10^{-1}$ ، $1/309 \times 10^{-1}$ ، $1/056 \times 10^{-1}$ و 2 که با افزایش مرتبه شتاب از ۲ به ۳ برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ به ترتیب ۱۵/۶۷۱، ۹/۲۹۵، ۴/۷۳۶، ۲/۸۴۰ و ۱/۵۶۶ درصد معیار خطا کاهش یافته است. میانگین کمینه خطا برای تمام میرایی‌ها ۶/۸۲۲ درصد می‌باشد که عدد کوچکی است.

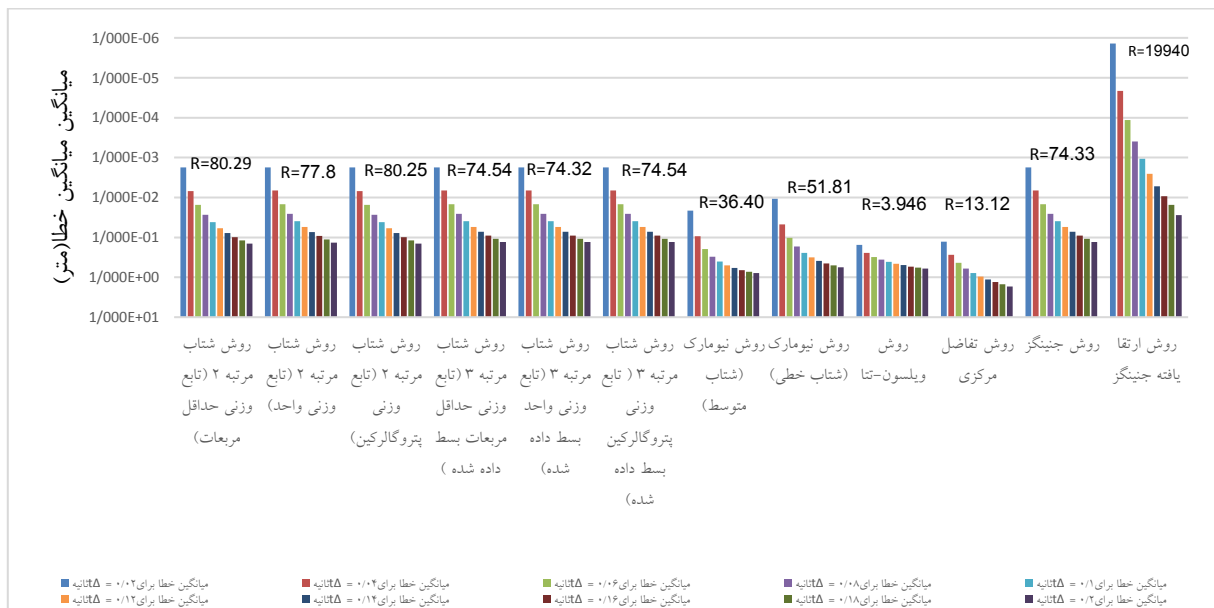
۵. کمینه‌ی میانگین خطا مربوط به روش جنینگر ارتقا یافته است که برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ به ترتیب خطاهای $3/769 \times 10^{-2}$ ، $3/071 \times 10^{-2}$ ، $2/491 \times 10^{-2}$ ، $2/252 \times 10^{-2}$ و $2/224 \times 10^{-1}$ مشاهده گردید. این مقادیر به مراتب کمتر از



شکل ۱۱ میانگین خطای روش‌های مختلف عددی برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد برای Δt برابر با ۰/۱۸ ثانیه



شکل ۱۲ میانگین خطای روش‌های مختلف عددی برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد برای Δt برابر با ۰/۲ ثانیه



شکل ۱۳ میانگین میانگین خطاهای روش‌های مختلف عددی برای میرایی‌های مختلف و Δt برابر با 0.02 ثانیه تا 0.2 ثانیه

۲. روش جینگز با نسبت خطای $8/805$
 ۳. روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی پتروگالرکین بسط داده شده) با نسبت خطای $8/819$
 ۴. روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی حدافل بسط داده شده) با نسبت خطای $8/819$
 ۵. روش شتاب مرتبه دوم (تابع وزنی واحد) با نسبت خطای $9/044$
 ۶. روش شتاب مرتبه دوم (تابع وزنی پتروگالرکین) با نسبت خطای $9/556$
 ۷. روش شتاب مرتبه دوم (تابع وزنی حدافل مربعات) با نسبت خطای $9/556$
 ۸. روش نیومارک (شتاب خطی) با نسبت خطای $45/18$
 ۹. روش ویلسون-تتا با نسبت خطای $67/19$
 ۱۰. روش نیومارک (شتاب متوسط) با نسبت خطای $69/16$
 ۱۱. روش تفاضل مرکزی با نسبت خطای $142/7$
- در جدول (۴)، روابط مربوط به روند افزایش خطای روش‌های مختلف بر حسب گام زمانی آورده شده است. این روابط همگی چند جمله‌ای‌های درجه ۳ هستند که همبستگی بسیار مناسبی با مقادیر واقعی‌شان دارند؛ به طوری که ضریب R^2 آنها، یک یا بسیار نزدیک به عدد یک است.

در نمودار میله‌ای نشان داده شده در شکل (۱۳)، مقادیر میانگین میانگین خطاها بر حسب گام‌های زمانی مختلف، برای روش مذکور در این مقاله آورده شده است. در بالای نمودار میله‌ای هر روش، عددی در کادر درج گردیده است که بیانگر نسبت خطای گام زمانی 0.2 ثانیه به گام زمانی 0.02 ثانیه است. بزرگترین این نسبت‌ها، مربوط به روش جینگز ارتقا یافته با نسبت 19940 است که حساسیت بسیار زیاد این روش را به گام زمانی نشان می‌دهد. کمترین نسبت‌ها مربوط به روش ویلسون-تتا با نسبت $3/946$ است که حساسیت بسیار کم این روش را به گام زمانی نشان می‌دهد. برای سایر روش‌ها، این نسبت‌ها دو رقمی می‌باشد.

در جدول (۳) مقادیر میانگین ده خطای مربوط به Δt ‌های مختلف (نمودار شکل ۱۳) برای روش مطرح شده در این مقاله آورده شده است. همچنین در این جدول نسبت خطای هر روش به خطای روش جینگز ارتقا یافته که حداقل خطا را دارا بوده است، آورده شده است. با دقت در نسبت‌های درج شده در این جدول، مشخص می‌گردد که کمترین خطا مربوط به روش جینگز ارتقا یافته با نسبت ۱ است و ترتیب افزایش خطا به صورت زیر می‌باشد:

۱. روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی واحد بسط داده شده) با نسبت خطای $8/805$

جدول ۳ مقادیر میانگین ده خطای مربوط به Δt ‌های مختلف (نمودار شکل ۱۳) برای ۱۲ روش مطرح شده در این مقاله

نام روش	روش شتاب مرتبه دوم (تابع وزنی حداقل مربعات)	روش شتاب مرتبه دوم (تابع وزنی واحد)	روش شتاب مرتبه دوم (تابع وزنی پتروگالرکین)	روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی حداقل مربعات بسط داده شده)	روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی واحد بسط داده شده)	روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی پتروگالرکین بسط داده شده)
میانگین خطا	$5/586 \times 10^{-2}$	$5/902 \times 10^{-2}$	$5/902 \times 10^{-2}$	$5/447 \times 10^{-2}$	$5/438 \times 10^{-2}$	$5/447 \times 10^{-2}$
نسبت خطا به حداقل خطا	۹/۵۵۶	۹/۰۴۴	۹/۵۵۶	۸/۸۱۹	۸/۸۰۵	۸/۸۱۹
نام روش	روش نیومارک (شتاب متوسط)	روش نیومارک (شتاب خطی)	روش ویلسون-تتا	روش تفاضل مرکزی	روش جینگز	روش ارتقا یافته جینگز
میانگین خطا	$4/272 \times 10^{-1}$	$2/790 \times 10^{-1}$	$4/150 \times 10^{-1}$	$8/112 \times 10^{-1}$	$5/439 \times 10^{-2}$	$6/177 \times 10^{-3}$
نسبت خطا به حداقل خطا	۶۹/۱۶	۴۵/۱۸	۶۷/۱۹	۱۴۲/۷	۸/۸۰۵	۱/۰۰

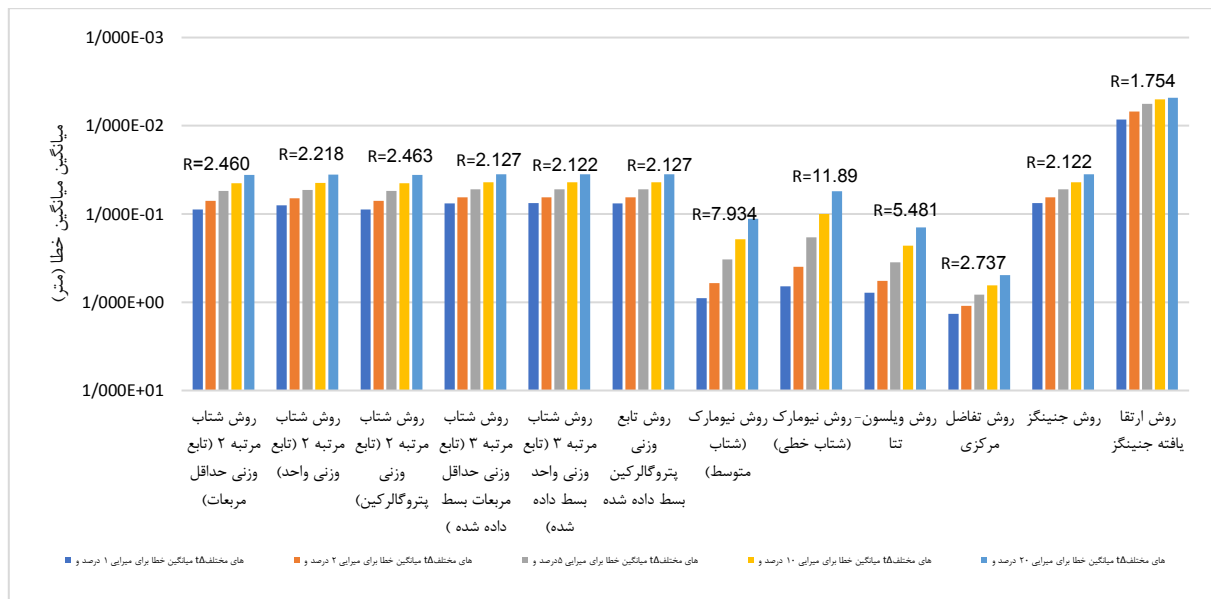
جدول ۴ روابط مربوط به روند افزایش خطای روش‌های مختلف بر حسب گام زمانی ($\Delta t \equiv \Delta t$)

نام روش	فرمول روند افزایش خطا	R^2
روش شتاب مرتبه دوم (تابع وزنی حداقل مربعات)	$y = -8.455x^3 + 5.5112x^2 - 0.056x + 0.0008$	۱/۰۰
روش شتاب مرتبه دوم (تابع وزنی واحد)	$y = -5.709x^3 + 4.5786x^2 - 0.0082x + 7 \times 10^{-5}$	۱/۰۰
روش شتاب مرتبه دوم (تابع وزنی پتروگالرکین)	$y = -8.5508x^3 + 5.5364x^2 - 0.0577x + 0.0008$	۱/۰۰
روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی حداقل مربعات بسط داده شده)	$y = -7.4838x^3 + 4.8579x^2 - 0.0229x + 0.0003$	۱/۰۰
روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی واحد بسط داده شده)	$y = -7.6257x^3 + 4.8839x^2 - 0.0244x + 0.0003$	۱/۰۰
روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی پتروگالرکین بسط داده شده)	$y = -7.4836x^3 + 4.8579x^2 - 0.0229x + 0.0003$	۱/۰۰
روش نیومارک (شتاب متوسط)	$y = -77.677x^3 + 19.107x^2 + 3.4805x - 0.0619$	$9/996 \times 10^{-1}$
روش نیومارک (شتاب خطی)	$y = -75.7x^3 + 25.519x^2 + 0.787x - 0.0173$	$9/998 \times 10^{-1}$
روش ویلسون-تتا	$y = 38.944x^3 - 19.474x^2 + 5.0517x + 0.0649$	$9/992 \times 10^{-1}$
روش تفاضل مرکزی	$y = -7.5833x^3 + 8.0793x^2 + 7.2581x - 0.0233$	$9/999 \times 10^{-1}$
روش جینگز	$y = -7.6142x^3 + 4.8814x^2 - 0.0243x + 0.0003$	۱/۰۰
روش ارتقا یافته جینگز	$y = 11.02x^3 - 2.161x^2 + 0.1376x - 0.0024$	$9/96 \times 10^{-1}$

و نسبت خطای روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی واحد بسط داده شده) در اعشار سوم متفاوت بود. (عدد ۲/۱۲۲) که این موضوع بیانگر حساسیت نه چندان زیاد روش شتاب مرتبه سه به مقدار میرایی است.

در جدول (۵)، روابط مربوط به روند کاهش خطای روش‌های مختلف بر حسب میرایی آورده شده است. این روابط مانند روابط جدول (۴)، همگی چند جمله‌ای‌های درجه ۳ هستند که همبستگی مناسبی با مقادیر واقعی‌شان دارند؛ به طوری که ضریب R^2 آنها، بسیار نزدیک به عدد یک است اما دقت آنها کمی کمتر از روابط جدول (۴) می‌باشد.

در نمودار میله‌ای نشان داده شده در شکل (۱۴)، مقادیر میانگین میانگین خطاها بر حسب میرایی‌های مختلف، برای ۱۲ روش مذکور در این مقاله آورده شده است. در بالای نمودار میله‌ای هر روش، عددی در کادر درج گردیده است که بیانگر نسبت خطای میرایی ۱ درصد به میرایی ۲۰ درصد است. بزرگترین این نسبت‌ها، مربوط به نیومارک (شتاب خطی) با نسبت ۱۱/۸۹ است که حساسیت نسبتاً زیاد این روش را به میرایی نشان می‌دهد. کمترین نسبت‌ها مربوط به روش جینگز ارتقا یافته با نسبت ۱/۷۵۴ است که حساسیت اندک این روش را به میرایی نشان می‌دهد. در ۳ روش مطرح شده در این مقاله برای روش شتاب مرتبه ۳، نسبت‌های خطای دو روش یکسان بودند (عدد ۲/۱۲۷)



شکل ۱۴ میانگین میانگین خطای روش‌های مختلف عددی برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد و Δt های مختلف

جدول ۵ روابط مربوط به روند کاهش خطای روش‌های مختلف بر حسب میرایی (بر حسب درصد)

R^2	فرمول روند افزایش خطا	نام روش
$9/862 \times 10^{-1}$	$y = -4 \times 10^{-5}x^3 + 0.0014x^2 - 0.0154x + 0.1003$	روش شتاب مرتبه دوم (تابع وزنی حداقل مربعات)
$9/908 \times 10^{-1}$	$y = -3 \times 10^{-5}x^3 + 0.001x^2 - 0.0115x + 0.0884$	روش شتاب مرتبه دوم (تابع وزنی واحد)
$9/861 \times 10^{-1}$	$y = -4 \times 10^{-5}x^3 + 0.0014x^2 - 0.0154x + 0.1004$	روش شتاب مرتبه دوم (تابع وزنی پتروگالرکین)
$9/943 \times 10^{-1}$	$y = -2 \times 10^{-5}x^3 + 0.0008x^2 - 0.01x + 0.0836$	روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی حداقل مربعات بسط داده شده)
$9/989 \times 10^{-1}$	$y = 22.641x^3 - 2.5424x^2 - 0.4742x + 0.0859$	روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی واحد بسط داده شده)
$9/989 \times 10^{-1}$	$y = 22.242x^3 - 2.4272x^2 - 0.4855x + 0.0863$	روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی پتروگالرکین بسط داده شده)
$9/982 \times 10^{-1}$	$y = 469.9x^3 + 16.246x^2 - 17.567x + 1.2406$	روش نیومارک (شتاب متوسط)
$9/983 \times 10^{-1}$	$y = -80.96x^3 + 115.22x^2 - 20.364x + 1.0231$	روش نیومارک (شتاب خطی)
$9/984 \times 10^{-1}$	$y = 574.09x^3 - 42.496x^2 - 9.9897x + 0.9947$	روش ویلسون-تتا
$9/987 \times 10^{-1}$	$y = 524.76x^3 - 38.416x^2 - 12.624x + 1.6187$	روش تفاضل مرکزی
$9/989 \times 10^{-1}$	$y = 22.644x^3 - 2.5426x^2 - 0.4742x + 0.0859$	روش جینگز
$9/99 \times 10^{-1}$	$y = 1.3241x^3 + 0.3668x^2 - 0.106x + 0.0104$	روش ارتقا یافته جینگز

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

یک سیستم یک درجه آزاد با فرکانس ۱ هرتز و میرایی‌های ۰.۰۵، ۰.۱، ۰.۲ و ۰.۳ درصد با بارگذاری هارمونیک در نظر گرفته شد. فرکانس بارگذاری هارمونیک از ۰.۱ تا ۳ هرتز (با افزایش ۰.۱ هرتز) تغییر داده شد و پاسخ تحلیلی (دقیق) آن محاسبه گردید.

در این مقاله روش شتاب مرتبه سوم با استفاده از توابع وزنی واحد، پتروگالرکین و کمترین مربعات بسط داده شد. این کار برای اولین بار است که لافل در ایران انجام شده است. سپس،

روش جینگز و روش شتاب مرتبه ۳، حدوداً یک میزان خطا داشتند که نسبت خطای آنها به خطای حداقل، حدود ۸/۸ بود. در پایان، روند تغییرات خطا بر حسب گام زمانی و میرایی بررسی گردید و روابطی به صورت چندجمله‌ای‌های درجه ۳ پیشنهاد گردید که همبستگی مناسبی با مقادیر واقعی‌شان داشتند. پیشنهاد می‌گردد در ادامه‌ی این تحقیقات، سیستم‌های چند درجه آزاد خطی و نیز سیستم‌های غیر خطی نیز با این روش‌های عددی، مورد بررسی قرار گیرند و میزان خطای این روش‌ها در این موارد نیز بررسی گردند.

فهرست علائم

جرم سیستم یک درجه آزاد	m
تعداد بازه‌ها	n
ضریب میرایی	C
ضریب سختی فنر	K
جابجایی مطلق یا نسبی جرم سیستم یک درجه آزاد	u و y
سرعت مطلق یا نسبی جرم سیستم یک درجه آزاد	\dot{u} و \dot{y}
شتاب مطلق یا نسبی جرم سیستم یک درجه آزاد	\ddot{u} و \ddot{y}
متغیر زمان	t, τ
نیروی تحریک کننده جرم سیستم یک درجه آزاد	p(t)
دامنه نیروی تحریک کننده سینوسی	p ₀
فرکانس زاویه‌ای بار سینوسی	ω
فرکانس زاویه‌ای طبیعی نامیرای سیستم یک درجه آزاد	ω_n
دوره تناوب ارتعاش طبیعی نامیرای سیستم یک درجه آزاد	T _n
فرکانس زاویه‌ای طبیعی میرای سیستم یک درجه آزاد	ω_D
نسبت میرایی سیستم یک درجه آزاد	ζ
گام زمانی	$\Delta t, \Delta t_i$

سپاسگزاری

سپس با روش‌های عددی شتاب مرتبه سه، شتاب مرتبه دو، روش نیومارک (روش شتاب متوسط و روش شتاب خطی)، روش ویلسون، روش تفاضل مرکزی، روش جینگز و روش جینگز ارتقا یافته پاسخ این سازه محاسبه شد و میزان خطای هر روش با استفاده از معیار جذر میانگین مربعات محاسبه گردید. این کار برای ده Δt انجام شد که کوچکترین آن مقدار ۰/۰۲ ثانیه و بزرگترین آن مقدار ۰/۲۰ ثانیه بود. نتایج کار نشان داد که بیشترین کاهش خطا در روش شتاب مرتبه سه نسبت به روش شتاب مرتبه ۲، مربوط به میرایی ۱ درصد و $\Delta t=0/20$ ثانیه می‌باشد. کمترین خطا برای تمام Δt ها مربوط به روش جینگز ارتقاء یافته بود. علت این امر ناشی از این موضوع است که در روش جینگز و جینگز ارتقاء یافته برای سمت چپ تساوی معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت هیچ گونه تقریبی در نظر گرفته نمی‌شود و در سمت راست تساوی معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت که مربوط به بارگذاری است فرض تغییرات خطی شتاب برای روش جینگز و در روش جینگز ارتقا یافته از منحنی‌های اسپیرالین مکعبی که پیوستگی شیب و مشتق دوم در نقاط اتصال رعایت می‌شود، استفاده می‌شود. در روش‌های دیگر عددی تقریباتی برای شتاب در نظر گرفته می‌شود. مثلاً در روش نیومارک (روش شتاب متوسط) مقدار شتاب در هر گام زمانی ثابت فرض می‌شود. یا در روش شتاب مرتبه سه که موضوع این مقاله می‌باشد، فرض می‌گردد که تغییرات شتاب در هر گام زمانی به صورت درجه ۳ می‌باشد که این فرضیات، می‌تواند بر واقعیات امر منطبق نباشد و در نتیجه باعث خطای قابل توجه می‌گردد. با توجه به اینکه تحلیل برای ده گام زمانی و پنج میرایی انجام شد، در نتیجه هر روش شامل پنجاه میانگین خطا می‌گردید که با میانگین‌گیری از این پنجاه میانگین خطا، میانگین میانگین خطاها به دست آمد که کمترین آنها مربوط به روش جینگز ارتقا یافته و بیشترین آنها مربوط به روش تفاضل مرکزی می‌گردید.

مراجع

- [1] A. A. Gholampour, M. Ghasemiye, H. Fallahnejad, "Direct Time Integration Method for Nonlinear Structural Problems," *Proceedings of the 6th National Congress on Civil Engineering, Iran, Semnan, Semnan University, [Spring 2011]*.
- [2] S. Y. Chang, "Accurate integration of nonlinear systems using Newmark explicit method," *Journal of Mechanics*,

vol. 25, no. 3, pp 289-297, 2009.

- [3] M. Mahmoudabadi, B. Taghavi, S. M. R. Hassani, S. M. J. Hosseini, "Improvement of the Linear Interpolation Method of Excitation Using the Spline Interpolation Function to Numerically Calculate the Response Coefficient of Linear One-Degree-Of-Freedom Systems," *Bulletin of Earthquake Science and Engineering*, Volume 10, Issue 4, Pages 121-133, [March 2024]: (in Persian).
- [4] M. Mahmoodabadi, S. M. J. Hosseini, "Comparison nonlinear response spectra of elastoplastic systems resulting from two excitation interpolation methods," *Ferdowsi Civil Engineering Journal*, vol. 36, no. 4 , pp. 21-34, [winter 2024].
- [5] A. K. Chopra, "Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering, 3rded," *Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey*, 2007.

