

کاربرد روش تبدیل دیفرانسیلی در تعیین سطح آزاد نشت محیط متخلخل یک بعدی

چکیده

تاکنون روش‌های عددی متنوعی مانند تفاضلات محدود، حجم محدود و اجزای محدود برای حل مسئله‌ی سطح آزاد نشت، در محیط یک بعدی و دو بعدی، بکار رفته است. معادله‌ی ریاضی حاکم بر مسئله‌ی نشت در محیط متخلخل، معادله‌ی لاپلاس می‌باشد. روش‌های تفاضلات محدود و اجزای محدود، بر پایه شبکه‌بندی سطح مورد نظر و بدست آوردن مقادیر هد در این سطح و تکرار این روند تا رسیدن به همگرایی موردنظر، مبتنی هستند. در این مقاله، مسأله‌ی سطح آزاد نشت در ستون آب یک‌بعدی، برای اولین بار با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیلی که روشی است مبتنی بر سری تیلور، با در نظر گرفتن شرایط مرزی موجود، حل گردیده است. نتایج حاصل با پاسخ‌های روش تفاضل محدود و حل تحلیلی مسئله که در بخش پیوست قرار دارد، مقایسه گردیده و تطابق خوبی مشاهده می‌شود. همچنین با توجه به نتایج می‌توان بیان داشت که روش تبدیل دیفرانسیلی از حجم محاسبات کمتری نسبت به روش فشارگسترده و روش تحلیلی برخوردار بوده و این امر از بروز اشتباهات محاسباتی در طولانی شدن روند محاسبات پیچیده جلوگیری می‌نماید.

کلمات کلیدی

روش تبدیل دیفرانسیلی، محیط متخلخل، معادله لاپلاس، سطح آزاد نشت، روش فشار گسترده.

Application of Differential Transform Method for Solving Free-Surface Seepage Problem of One-Dimensional Porous Media

ABSTRACT

Several numerical methods, such as finite difference, finite volume, finite element, and so on, have been utilized to solve the problem of the free surface seepage in one-dimensional and two-dimensional domains. The governing equation of the seepage problem in porous media is the well-known Laplace equation. The finite difference and finite element methods are based on meshing the desired surface and obtaining the head values at this level; and repeating this process until convergence is reached. In this paper, a new method is proposed to solve the one-dimensional free-surface seepage problem in one-dimensional water column based on the Taylor-series expansion, entitled Differential Transform Method (DTM). It should be mentioned, up to now, DTM is employed to solve the various form of differential equations, but it has not been used in seepage problems. For some verification purposes, the obtained results are compared with the well-known finite difference method, and the good agreement is observed. Moreover, the analytical solution of the problem is attained by the use of mathematical techniques and it is reported in the paper as an appendix. Also, according to the results, it can be said that the DTM solution is more stable than the extended pressure and the analytical methods, and this prevents the occurrence of calculation errors in the lengthening of the calculation process.

KEYWORDS

Differential transform method, porous media, Laplace equation, free surface seepage, extended pressure method.

به طور کلی به منظور تعیین محل سطح آزاد نشت از روش‌های مختلفی مانند راه‌حل‌ها، فرمول‌های تقریبی و تجربی و یا حل از طریق رسم شبکه جریان استفاده می‌گردد. روش‌های تحلیلی حل تراوش در محیط‌های متخلخل مبتنی بر حل معادله دیفرانسیل حاکم با استفاده از فرضیات ساده‌کننده می‌باشد. این فرضیات در شرایط خاص قابل قبول هستند و لذا دامنه کاربرد روش‌های تحلیلی محدود به مسائل با هندسه‌ی خاص و شرایط مرزی خاص می‌شود.

همچنین می‌توان از روش‌های مختلف عددی نظیر روش تفاضل‌های محدود، روش اجزای محدود و روش حجم‌های محدود نیز در تعیین محل سطح آزاد نشت بهره گرفت. برای تحلیل نشت، یک مدل کلی که پدیده نشت را توصیف کند، بایستی در دسترس باشد. در صورت داشتن شرایط مرزی و خصوصیات خاک، این مدل می‌تواند برای تعیین هد و توزیع جریان و مقدار نشت بکار رود. معادله‌ی لاپلاس برای روش‌های مختلف در آنالیز نشت، مبنای ریاضی محسوب می‌شود.

روش تفاضلات محدود، معادله لاپلاس را با منقطع کردن این معادلات به یک سری معادلات جبری خطی حل می‌نماید. ناحیه و حوضه‌ی جریان به یک شبکه مستطیلی با گره‌هایی در گوشه‌ها تقسیم شده، که این المان‌های مستطیلی، نشان‌دهنده یک هد می‌باشند. در نقاط یا در طول مرزهایی که هد ثابتی دارند مقادیر هد مشخص بوده، اما برای گره‌هایی که مقادیر اولیه برای هد نداریم، مقدار هد باید تخمین زده شود. با استفاده از قانون داری و این فرض که هد در هر گره مقدار میانگین گره‌های اطراف می‌باشد، N معادله جبری خطی با N هد مجهول بدست می‌آید که N برابر تعداد گره‌ها می‌باشد [1]. یک شبکه‌ی ساده با تعداد گره‌های محدود با دست قابل حل می‌باشد، اما معمولاً N مقدار بزرگی دارد و روش‌های دیگری مانند Relaxation شامل تکرار و استفاده از کامپیوتر بایستی بکار رود [2]. معادلات گسسته سازی شده با روش تکرار حل می‌شود و این تکرار تا زمانی ادامه می‌یابد که تغییرات در هد برای هر گره از میزان تلورانس انتخابی کمتر شود [3-4]. فرایند Relaxation [5] یک روش عددی است که با موفقیت [6] برای تعیین راه‌حل‌های تقریبی مسایل پیچیده جریان به کار گرفته شده، که براساس حساب دیفرانسیل و انتگرال تفاضلهای متناهی پایه گذاری شده است. در این روش شبکه‌بندی حوضه جریان به شکل یک شبکه مربعی با فواصل مساوی می‌باشد [7].

روش اجزا محدود، دومین راه‌حل عددی می‌باشد. این روش نیز براساس شبکه بندی استوار است (البته نه ضرورتاً شبکه مستطیلی) که حوضه جریان را به المان‌های گسسته تقسیم می‌کند و N معادله با N مجهول ایجاد می‌کند. خصوصیات مواد مانند نفوذپذیری، برای هر المان مشخص و همچنین شرایط مرزی از قبیل هد و سرعت جریان نیز تعیین می‌شود. برای محاسبه هد در هر گره و جریان در المان‌ها بایستی یک دستگاه معادلات حل شود. روش اجزای محدود نسبت به روش تفاضلات محدود برای مسایل نشت پیچیده‌تر، دارای فوایدی است از جمله اینکه هندسه‌ی پیچیده شامل لایه‌های مورب از مواد به سادگی قابل مدل کردن می‌باشد و با تغییر دادن اندازه المان‌ها، در مناطقی که گرادپان نشت یا سرعت بالاست، مدل دقیق‌تری می‌توان ایجاد کرد [8-20].

از آنجاکه قسمتی از مقادیر مرزی بایستی در سطح بکار روند، حل مسئله بدون داشتن اطلاعاتی در مورد موقعیت سطح آزاد امکان‌پذیر نمی‌باشد. به عبارت دیگر موقعیت سطح آزاد نشت قسمتی از حل مسئله می‌باشد. راه حل مرسوم این است که مقادیر مرزی را با استفاده از یک سطح آزاد تقریبی بکار برده و سپس با استفاده از سعی و خطا اقدام به حل کامل مسئله می‌کنیم و محل سطح آزاد را در هر سعی و خطا بهبود می‌بخشیم [21-22]. روش معادله‌ی انتگرال مرزی برای نوشتن معادلات برای نقاط گسسته روی سطح آزاد بکار می‌رود. این معادلات تنها به اطلاعات مرزها بستگی پیدا می‌کنند و بنابراین موقعیت سطح آزاد را بدون حل کامل مسئله می‌توان تعیین کرد. درضمن نتایج معادلات جبری موقعیت سطح آزاد را کاملاً توصیف کرده و هیچ سعی و خطایی نیاز نمی‌باشد بغیر از موقعیتی که معادلات غیرخطی باشند. این روش مخصوصاً زمانی مفید واقع می‌شود که حل در تعداد محدودی از نقاط یا تنها قسمتی از حل مورد نظر باشد. از آنجا که این روش تنها اطلاعات مرزها را استفاده می‌کند، یک مزیت مهم برای مسائلی است که نیازمند تعیین موقعیت سطح آزاد می‌باشند [23-25]. زمانی که ضریب هدایت هیدرولیکی در هر ناحیه از جریان متفاوت باشد، روش معادله انتگرال مرزی می‌تواند برای هر ناحیه بکار برده شود و سپس ناحیه‌ها را با استفاده از معادلات سازگار به هم مرتبط ساخت یا باهم ترکیب نمود [26].

روش تبدیل ديفرانسيلى اولين بار توسط ژو¹ برآى تحليل و بررسى مدارهاى الكتريكي در حالت يك بعدى ارائه گرديد [27]. سپس شينگ هويى و چن كوانگ² روش تحويل ديفرانسيلى را برآى تحليل ارتعاشات آزاد و اجبارى يك تير يكنواخت، بر روى پى غيرهمگن، كه تحت بار محورى كشى و بار عرضى قرار دارد، استفاده كردند [28]. همچنين شينگ هويى و چن كوانگ روش تحويل ديفرانسيلى را برآى حالت دو بعدى گسترش داده و با ارائهى چند قضيه سادى از آن، به اثبات آن‌ها پرداختند [29]. در ادامه، فاطما اياز³ به بيان روش تحويل ديفرانسيلى دو بعدى پرداخته و با ارائهى تعدادى از قضيه‌هاى اين تحويل، به اثبات آن‌ها پرداخت. وى با بكارگرى اين روش، در حل تعدادى مسئله و مقايسه‌ى جواب آن‌ها با جواب دقيق، نحوه دقت روش را مورد صحت‌سنجى قرارداد همچنين با استفاده از قضاى تحويل ديفرانسيل دو بعدى، سيستم‌هاى شامل دو معادله‌ى ديفرانسيل و دو مجهول را حل کرده و با مقايسه‌ى جواب‌هاى بدست آمده از روش‌هاى ديگر، توانايى روش تحويل ديفرانسيلى در حل اين گونه مسائل را نيز نشان داد [30-31].

2- مواد و روش‌ها

2-1- روش تحويل ديفرانسيلى⁴ يك بعدى

در اين قسمت، روش تحويل ديفرانسيلى (DTM) در حالت يك بعدى بطور مختصر شرح داده خواهد شد. روش تحويل ديفرانسيلى، روشى نيمه تحليلى - عددى برآى حل معادلات تابعى است. اين روش اولين بار توسط ژو در سال 1986 برآى كاربردهاى مهندسى معرفى گرديد و از آن برآى حل مسائل مقدار اوليه‌ى خطى و غيرخطى در تحليل مدارهاى الكتريكي استفاده شد [27]. روش تحويل ديفرانسيلى از بسط سرى تيلور برآى جواب انواع معادلات بصورت يك چندجمله‌اى استفاده مى‌كند. در روش سرى تيلور، برآى محاسبه‌ى ضرايب سرى، بايد مشتقات مختلف تابع را در يك نقطه‌ى معين به دست آورد، كه اين محاسبات در مراتب بالاتر بسيار سخت‌تر خواهد بود. روش تحويل ديفرانسيلى يك فرآيند تكرارى برآى به دست آوردن جواب سرى تيلور معادله‌ى مفروض است، اما در اين روش، مشتقات به طور مستقيم محاسبه نمى‌شوند، بلكه برآى محاسبه‌ى مشتقات از يك فرآيند تكرارى استفاده مى‌شود. به همين دليل، در اين روش، حجم محاسبات بسيار کاهش خواهد يافت. در اين قسمت، نخست برآى آشنايى با روش تحويل ديفرانسيلى، مباني آن را بطور خلاصه شرح داده و سپس پاره‌اى از قضيه‌هاى روش تحويل ديفرانسيلى يك بعدى، نشان داده خواهد شد. تابع يك متغيره‌ى $u(x)$ را در نظر بگيريد. فرض كنيد $u(x)$ در دامنه‌ى D تعريف شده و نقطه‌ى معين x_0 در اين دامنه قرار داشته باشد. در اين حالت $u(x)$ بصورت يك سرى تيلور به مركز x_0 نمايش داده مى‌شود:

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad (1)$$

ضريب پشت جمله‌ى $(x - x_0)^k$ بسط مك لورن را تحويل ديفرانسيلى تابع $u(x)$ مى‌نامند و با $U(k)$ نمايش مى‌دهند:

$$U(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} u(x) \right]_{x=x_0} ; k \geq 0 \quad (2)$$

كه در آن $u(x)$ تابع اصلى و $U(k)$ تحويل ديفرانسيلى تابع $u(x)$ است. $U(k)$ ، در واقع، دنباله‌اى از اعداد حقيقى است. تحويل ديفرانسيلى معكوس دنباله‌ى $\{U(k)\}_{k=0}^{\infty}$ برابر است با:

¹ Zhou

² Chen, C. o. K., & Ho, S. H

³ Fatma Ayaz

⁴ Differential Transform Method

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} U(k)(x - x_0)^k \quad (3)$$

وقتی که $x_0 = 0$ باشد، آنگاه تابع فوق بصورت زیر تبدیل می‌شود:

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} U(k)x^k \quad (4)$$

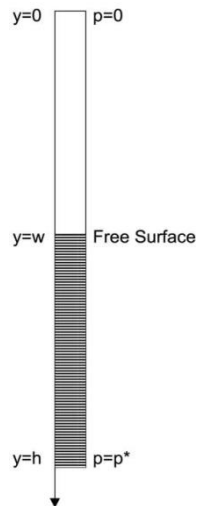
تبدیل دیفرانسیلی یک بعدی همانند دیگر مباحث ریاضی، از تعدادی قضیه تشکیل شده است که حل معادلات بر مبنای این قضایا صورت می‌گیرد. در ادامه، تعدادی از پرکاربردترین قضیه‌های این روش در فضای یک بعدی در جدول ۱ نمایش داده شده است.

جدول ۱: برخی از قضایای روش تبدیل دیفرانسیلی [31]

تابع اصلی	تابع تبدیل یافته دیفرانسیلی
$w(x) = u(x) \pm v(x)$	$W(k) = U(k) \pm V(k)$
$w(x) = u(x)v(x)$	$W(k) = \sum_{r=0}^k U(r)V(k-r)$
$w(x) = \lambda u(x)$	$W(k) = \lambda U(k)$, $\lambda = \text{constant}$
$w(x) = x^m$	$W(k) = \delta(k-m) = \begin{cases} 1 & k = m \\ 0 & k \neq m \end{cases}$
$w(x) = \frac{d u(x)}{dx}$	$W(k) = (k+1)U(k+1)$
$w(x) = \frac{d^2 u(x)}{dx^2}$	$W(k) = (k+2)(k+1)U(k+2)$
$w(x) = \frac{d^r u(x)}{dx^r}$	$W(k) = (k+1)(k+2)\dots(k+r)U(k+r)$
$w(x) = e^{\lambda x}$	$W(k) = \frac{\lambda^k}{k!}$; $k = \text{constant}$

۲-۲- ستون یک بعدی با سطح آزاد

همانطور که در شکل ۱ مشاهده می‌شود، هد فشاری p توزیع شده در ستون آب با ارتفاع h ، زمانی که فشار p در بالا و پایین ستون آب، معین و قسمت تحتانی ستون آب شامل محیطی متخلخل می‌باشد، نشان داده شده است:



شکل ۱: ستون آب یک بعدی با سطح آزاد نامشخص [32]

مسئله‌ی شکل ۱ که هدف از طرح آن، یافتن سطح آزاد نشت و یا به عبارتی ایستایی آب در آن است، به صورت زیر مطابق با پژوهش بردت و توبیتا [32]، بیان می‌گردد:

$$\begin{cases} \frac{d^2 p}{dy^2} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{dp}{dy} = 0 & p \leq \varepsilon \\ \frac{d^2 p}{dy^2} = 0 & p > \varepsilon \end{cases} \quad (5)$$

همانطور که می‌بینیم، مسأله‌ی فوق شامل دو معادله دیفرانسیل مرتبه‌ی دو بوده و لذا به چهار شرط مرزی نیاز دارد:

$$\begin{aligned} p &= 0 & \text{at } y &= 0 \\ p &= p^* & \text{at } y &= h \end{aligned} \quad (6)$$

شروط مرزی بیان شده، شامل فشار صفر در سطح بالا و مجاورت هوای آزاد و فشار معین انتهایی ستون آب بوده و دو شرط دیگر، شروط پیوستگی در محل تلاقی محیط متخلخل و آب می‌باشند.

با فرض اینکه مختصات y رو به پایین و $h > p^*$ بوده، حل بدیهی فیزیکی مسئله به صورت زیر است:

$$\begin{cases} p = 0 & y \leq h - p^* \\ p = p^* + y - h & y > h - p^* \end{cases} \quad (7)$$

در بخش‌های بعد، به بیان حل به روش تبدیل دیفرانسیلی مسأله فوق می‌پردازیم. سپس نشان خواهیم داد نتایج روش فوق در تعامل بسیار خوبی با نتایج روش تحلیلی خواهد بود.

۳-۲- حل مسأله به روش تبدیل دیفرانسیلی

طبق تعریف روش تبدیل دیفرانسیلی در رابطه‌ی (۴)، برای مقادیر p_1, p_2 که به ترتیب فشار در قسمت فوقانی و تحتانی (محیط متخلخل) هستند خواهیم داشت که:

$$\begin{aligned} p_1(y) &= P_1(0) + P_1(1)y + P_1(2)y^2 + \dots \\ p_2(y) &= P_2(0) + P_2(1)y + P_2(2)y^2 + \dots \end{aligned} \quad (۸)$$

باید دقت نمود که در روابط (۸)، $p_1(y), p_2(y)$ که در سمت چپ معادلات هستند، کوچک بوده که نشان دهنده‌ی توابع اصلی و مقادیر $P_1(0), \dots, P_2(0), \dots$ در سمت راست معادلات، با P بزرگ نوشته می‌شوند که نشان دهنده‌ی تبدیل یافته‌ی دیفرانسیلی تابع اصلی هستند. حال برای حل معادلات مسأله در رابطه‌ی (۵) با استفاده از DTM، باید از دو معادله‌ی فوق تبدیل دیفرانسیلی گرفته شود. از ضابطه‌ی دوم ($p > \varepsilon$) شروع کرده و طبق روابط تعریف شده در جدول ۱، با دو بار مشتق‌گیری از رابطه برحسب y داریم:

$$(k+2)(k+1)P_2(k+2) = 0 \quad (۹)$$

با جایگذاری مقادیر مختلف k می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} k=0 &\rightarrow 2P_2(2) = 0 \\ k=1 &\rightarrow 6P_2(3) = 0 \\ k=2 &\rightarrow 12P_2(4) = 0 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (۱۰)$$

با مشاهده روند فوق و با توجه به این موضوع که عددی ثابت در مقادیر مختلف P_2 ضرب می‌شوند، می‌توان نتیجه گرفت که بسط ضابطه‌ی دوم را بصورت زیر نوشت:

$$P_2(y) = P_2(0) + P_2(1)y \quad (۱۱)$$

بطور مشابه، با توجه به روابط موجود در جدول ۱، برای مشتق اول و دوم نسبت به y ، با گرفتن تبدیل دیفرانسیلی از معادله‌ی اول و ترکیب آن‌ها، تبدیل یافته‌ی دیفرانسیلی در $p \leq \varepsilon$ معادله ۵، خواهیم داشت:

$$(k+2)(k+1)P_1(k+2) = \frac{1}{\varepsilon}(k+1)P_1(k+1) \quad (۱۲)$$

همانند قبل با جایگذاری مقادیر مختلف k در معادله‌ی فوق، می‌توان مقادیر مختلف $P_1(y)$ را بدست آورد و نوشت:

$$\begin{aligned} k=0 &\rightarrow P_1(2) = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{2} P_1(1) \\ k=1 &\rightarrow P_1(3) = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{3} P_1(2) = \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{2 \times 3} P_1(1) = \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{3!} P_1(1) \\ k=2 &\rightarrow P_1(4) = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{4} P_1(3) = \frac{1}{\varepsilon^3} \cdot \frac{1}{2 \times 3 \times 4} P_1(1) = \frac{1}{\varepsilon^3} \cdot \frac{1}{4!} P_1(1) \\ k=3 &\rightarrow P_1(5) = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{5} P_1(4) = \frac{1}{\varepsilon^4} \cdot \frac{1}{2 \times 3 \times 4 \times 5} P_1(1) = \frac{1}{\varepsilon^4} \cdot \frac{1}{5!} P_1(1) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (۱۳)$$

با مشاهده‌ی روند فوق و ارتباط بین هر کدام از مقادیر $P_1(k)$ به مقادیر قبل از خود، می‌توان نتیجه گرفت که:

$$P_1(k) = \frac{1}{\varepsilon^{k-1}} \cdot \frac{1}{k!} P_1(1) \quad (14)$$

بسط تابع مجهول (رابطه ۸) برای قسمت اول آن را می توان بصورت بازشده ی زیر بازنویسی کرد:

$$P_1(y) = P_1(0) + P_1(1)y + P_1(2)y^2 + \dots + P_1(k)y^k \quad (15)$$

و یا باتوجه به رابطه بدست آمده در (۱۴) میتوان بصورت خلاصه نوشت:

$$P_1(y) = P_1(0) + P_1(1)y + P_1(1) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon^{k-1}} \cdot \frac{1}{k!} y^k \quad (16)$$

با بکارگیری قضایای ریاضی در مورد سیگما در رابطه ی (۱۵)، ابتدا مقدار $P_1(1)y$ را به داخل سیگما برده و سپس یک واحد از مقدار پایه آن سیگما کم کرده و می توانیم بنویسیم:

$$P_1(y) = P_1(0) + P_1(1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^k}{\varepsilon^{k-1} k!} \quad (17)$$

تا اینجا مشخص شد که حل مسئله ی فوق با DTM به چهار مجهول $P_1(0), P_1(1), P_2(0), P_2(1)$ وابسته است که این چهار مجهول با چهار شرط مرزی طبق شکل (۱) بدست خواهند آمد.

لازم به ذکر است که روابط بدست آمده در (۹) و (۱۲) به رابطه ی بازگشتی^۱ در روش تبدیل دیفرانسیلی معروف هستند که نشان دهنده ی ارتباط میان تابع اصلی و مقادیر بدست آمده تبدیل دیفرانسیلی در آن تابع حول نقطه ی مذکور می باشند. روابط بازگشتی در روش تبدیل دیفرانسیلی از اهمیت بالایی برخوردار هستند چون بدست آوردن آن ها با توجه به اینکه روش بر پایه بسط تیلور توابع است، یعنی رسیدن به پاسخ نهایی مسأله (البته پس از اعمال شرایط مرزی).

حال به سراغ اعمال شرایط مرزی برای یافتن مجهولات معادلات فوق، با در نظر گرفتن این موضوع که شرط $P_1(y)$ در قسمت فوقانی ستون آب و شرط $P_2(y)$ در قسمت پایینی آن اعمال شود، می رویم.

ابتدا دو شرط مرزی بالایی و پایینی ستون آب - رابطه ی (۶) - را اعمال کرده و پس از اعمال شرط مرزی بالایی در $y = 0$ ، $P_1(0) = 0$ بدست آمده و با اعمال شرط مرزی پایینی در $y = h$ که در محیط متخلخل موجود است، $P_2(0) = P^* - P_2(1)h$ بدست خواهد آمد.

حال به اعمال شرط مرزی در محل مشترک آب و محیط متخلخل که بیان کننده ی برابر بودن دو رابطه ی P_1, P_2 در ارتفاع سطح آزاد d با مقدار ε است، پرداخته و خواهیم داشت:

$$P_1(d) = P_2(d) = \varepsilon \quad (18)$$

با استفاده از رابطه ی (۱۱) در ارتفاع d می توان نوشت:

$$P_2(d) = P_2(0) + P_2(1)d = \varepsilon \quad (19)$$

از مراحل قبل می دانیم که $P_2(0) = P^* - P_2(1)h$ است. بنابراین با جایگذاری این عبارت در رابطه ی (۱۹) و خلاصه نویسی، می توان آن را بصورت زیر بازنویسی نمود:

$$P^* - P_2(1)(h - d) = \varepsilon \quad (20)$$

¹ Recursive Formula

همانند قبل، با استفاده از مقدار بدست آمده $P_1(0) = 0$ از اعمال شرط مرزی و قراردادن آن در رابطه‌ی (۱۷) در ارتفاع d خواهیم داشت:

$$P_1(d) = P_1(1) \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^k}{\varepsilon^{k-1} k!} \right] = \varepsilon \quad (21)$$

همچنین با دانستن این موضوع که در محل مشترک آب و محیط متخلخل، شرط پیوستگی جریان نیز باید برقرار باشد، به نتیجه‌ی زیر خواهیم رسید:

$$y = d, P = \varepsilon \Rightarrow \frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{\partial P_2}{\partial y} \quad (22)$$

با استفاده از روابط بدست آمده در (۱۱) و (۱۷) برای $P_1(y), P_2(y)$ و مشتق‌گیری مرتبه اول نسبت به y طبق رابطه‌ی (۲۲) از آن‌ها، نتایج زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial P_2}{\partial y} = P_2(1) \quad ; \quad \frac{\partial P_1}{\partial y} = P_1(1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{\varepsilon^k k!} \quad (23)$$

با نتایج بدست آمده از رابطه‌ی فوق (۲۳) و اعمال شرط پیوستگی - رابطه‌ی (۲۲) - در محل مشترک آب و محیط متخلخل، می‌توان نوشت:

$$P_2(1) = P_1(1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{\varepsilon^k k!} \quad (24)$$

در ادامه، برای نشان دادن این امر که حل DTM به همان حل دقیق ارائه شده در بخش حل تحلیلی منجر شود، روابط بین مجهولات این دو حل را روشن می‌سازیم. با اندکی تأمل می‌توان دریافت که عملاً $P_1(0) = c_1 + c_2$ و همچنین $P_2(0) = c_4, P_2(1) = c_3$ هستند:

$$\begin{cases} P_1(0) = c_1 + c_2 \\ \varepsilon P_1(1) = c_2 \rightarrow P_1(1) = \frac{1}{\varepsilon} c_2 \end{cases} \quad (25)$$

با توجه به اینکه $P_1(0) = 0$ می‌باشد، $c_1 = -c_2$ بدست خواهد آمد. حال با استفاده از رابطه‌ی $P_2(0) = P^* - P_2(1)h$ که از قبل بدست آمده و قراردادن ضرایب تعریف شده‌ی c_3, c_4 در آن، رابطه‌ی $c_4 = P^* - c_3 h$ نتیجه خواهد شد. با جایگذاری مقادیر $P_2(1) = c_3, P_1(1) = \frac{1}{\varepsilon} c_2$ در رابطه‌ی (۲۴) می‌توان آن را بصورت زیر بازنویسی نمود:

$$c_3 = c_2 \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{\varepsilon^k k!} \quad (26)$$

با قراردادن مقادیر بدست آمده برای $P_2(1), P_2(0)$ برحسب ضرایب c_3, c_4 در رابطه‌ی (۱۹) و فاکتورگیری از عامل مشترک و ساده‌سازی آن، می‌توان نوشت:

$$P_1(1)(d-h) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{\varepsilon^k k!} = \varepsilon - P^* \quad (27)$$

همچنین از شرط مرزی مشترک آب و محیط متخلخل که از یک سو منجر به رابطه‌ی (۲۱) شد، پس از ساده‌سازی داریم:

$$P_1(1) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{\varepsilon^k k!} - 1 \right)^{-1} = -\frac{1}{2} + \left(\frac{\varepsilon}{y}\right) + \frac{1}{12} \left(\frac{y}{\varepsilon}\right) - \frac{1}{720} \left(\frac{y}{\varepsilon}\right)^3 + \dots = \frac{1}{-1 + e^{y/\varepsilon}} \quad (28)$$

حال با جایگذاری رابطه‌ی بدست آمده برای $P_1(1)$ از روابط بیان شده، بصورت کلی برای مقادیر مختلف فشار می‌توان نوشت که:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1(y) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^k}{\varepsilon^k k!} - 1 \right)^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^k}{\varepsilon^{k-1} k!} \quad p \leq \varepsilon \\ p_2(y) = P^* - \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^k}{\varepsilon^k k!} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^k}{\varepsilon^k k!} - 1 \right)^{-1} \right] h + \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^k}{\varepsilon^k k!} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^k}{\varepsilon^k k!} - 1 \right)^{-1} \right] y \quad p > \varepsilon \end{array} \right. \quad (29)$$

بنابراین، روش تبدیل دیفرانسیلی نیز توانست به حل دقیق مسئله - رابطه‌ی (۴۵) - که در پیوست بصورت کامل ارائه شده است، دست یابد. لازم به ذکر است که، حل فوق برای نخستین بار است که به روش تبدیل دیفرانسیلی انجام می‌شود. با توجه به شکل ۱ و معلوم بودن مقادیر p^* , ε , h طبق فرض مسأله، پس از جایگذاری در رابطه‌ی (۲۸)، محل سطح آزاد نشت در ارتفاع d از بالای ستون یک بعدی آب شکل ۱، بدست خواهد آمد.

۳- نتایج و بحث

باتوجه به حل فوق و جایگذاری موارد بدست آمده، میتوان حل DTM مسئله را بصورت زیر بازنویسی کرد:

با دانستن حل مسئله بصورت تحلیلی، فیزیکی [32] و روش فشار گسترده^۱ [32]، برای ستونی آب به ارتفاع $h = 10m$ و فشار حداکثر $P^* = 5m$ و هد فشاری پایه‌ی $\varepsilon = 0.5m$ ، به مقایسه‌ی نتایج حاصل از روش‌های فوق با روش تبدیل دیفرانسیلی - رابطه‌ی (۲۹) - مطابق جدول ۲ می‌پردازیم:

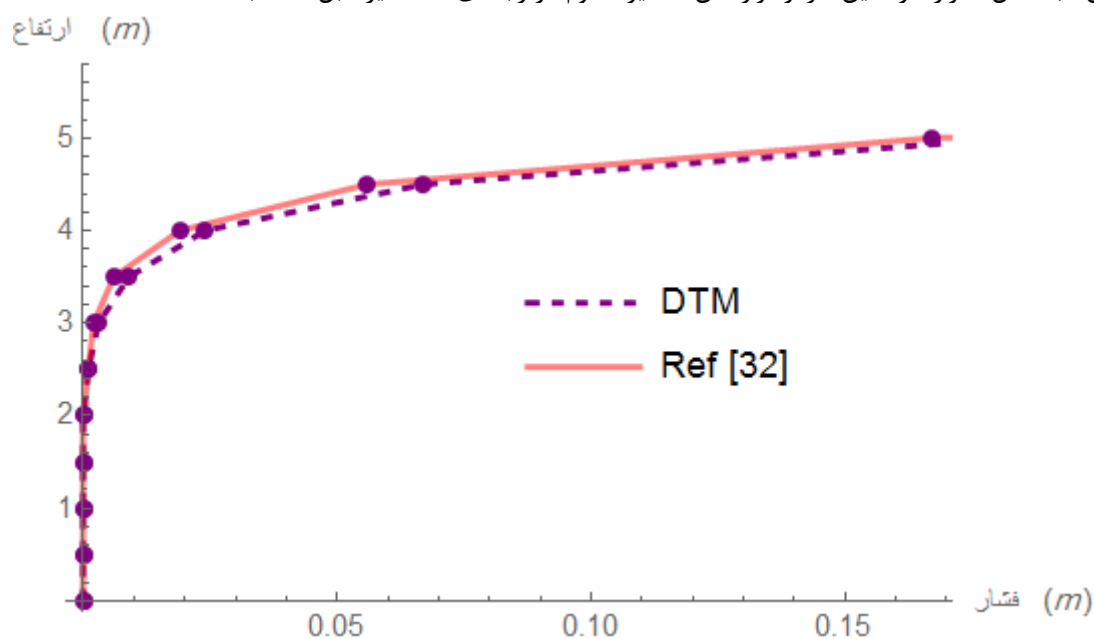
جدول ۲: مقایسه‌ی نتایج بدست آمده برای فشار ستون آب یک بعدی در ارتفاع مشخص به روش‌های مختلف

ارتفاع y (m)	فشار P (m)				مقدار خطا نسبت به روش تحلیلی	
	حل فیزیکی [32]	حل تحلیلی	روش فشار گسترده [32] (EP)	روش تبدیل دیفرانسیلی (DTM)	فشار گسترده	تبدیل دیفرانسیلی
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,5	0,00	0,00	0,00	0,0000143	0,00	0,00
1	0,00	0,00	0,00	0,0000533	0,00	0,00
1,5	0,00	0,00	0,00	0,000159	0,00	0,00
2	0,00	0,00	0,00	0,000447	0,00	0,00
2,5	0,00	0,001	0,001	0,00123	0,00	0,00
3	0,00	0,003	0,002	0,003360	-0,001	0,00
3,5	0,00	0,009	0,006	0,009149	-0,003	0,00
4	0,00	0,024	0,019	0,024885	-0,005	0,00
4,5	0,00	0,067	0,056	0,067660	-0,011	0,00
5	0,00	0,183	0,167	0,183934	-0,0016	0,00
5,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,00	0,00
6	1	1	1	1	0,00	0,00
6,5	1,5	1,5	1,5	1,5	0,00	0,00
7	2	2	2	2	0,00	0,00
7,5	2,5	2,5	2,5	2,5	0,00	0,00
8	3	3	3	3	0,00	0,00
8,5	3,5	3,5	3,5	3,5	0,00	0,00
9	4	4	4	4	0,00	0,00

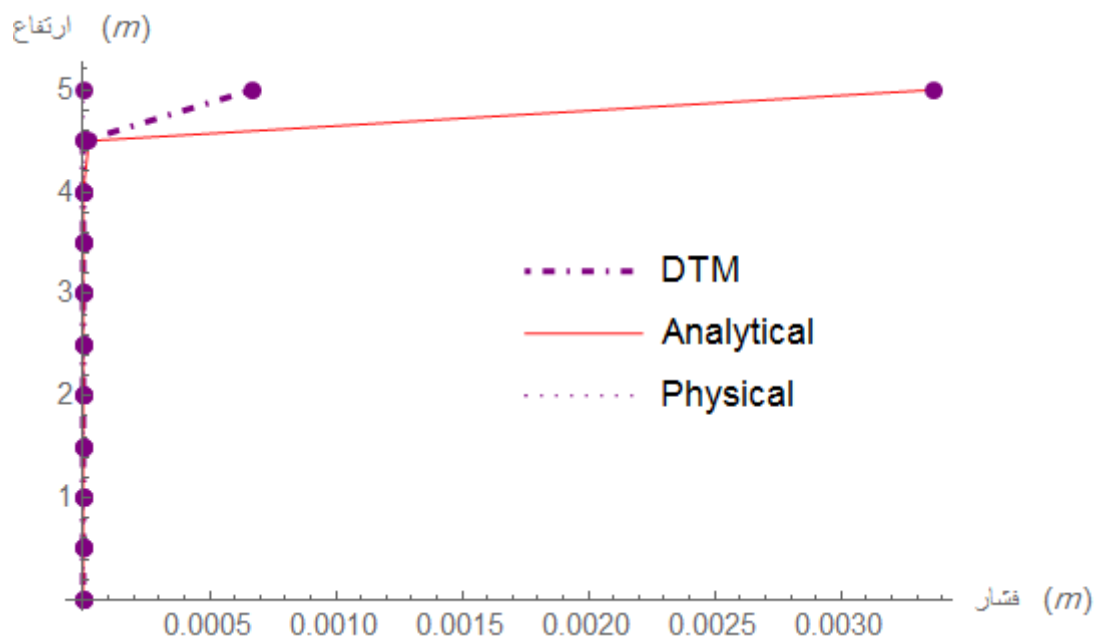
¹ Extended Pressure

9/5	4/5	4/5	4/5	4/5	0/00	0/00
10	5	5	5	5	0/00	0/00

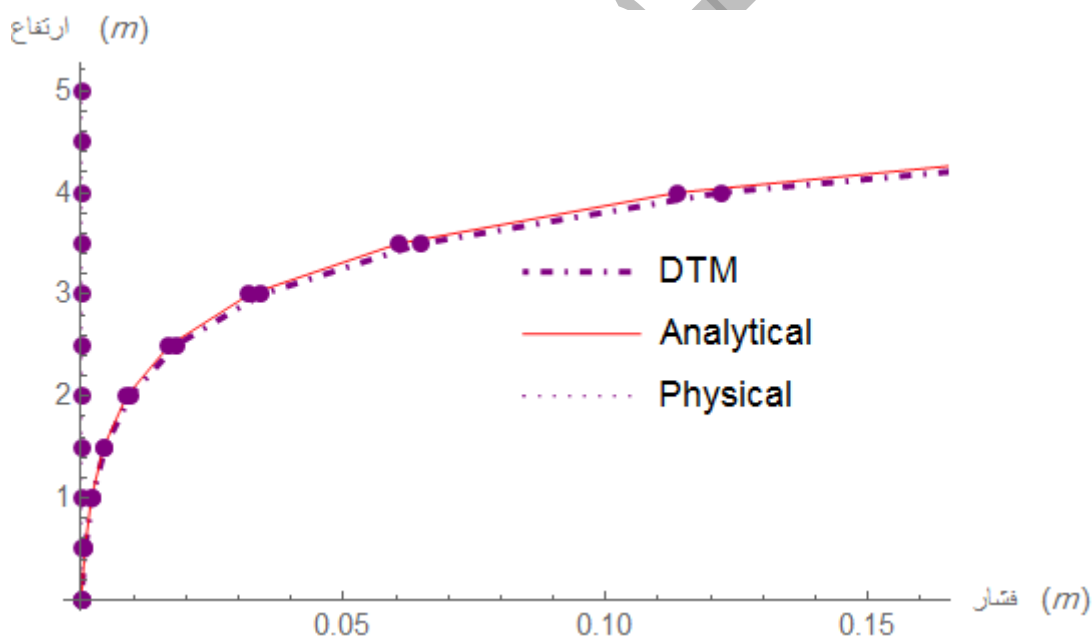
باتوجه به مقادیر بدست آمده از جدول ۲، می‌توان دریافت که روش تبدیل دیفرانسیلی در مقایسه با روش‌های دیگر از دقت قابل قبولی نسبت به روش تحلیلی برخوردار بوده است. البته باید توجه کرد که حل فیزیکی مسئله‌ی فوق نسبت به دیگر روش‌ها از دقت پایینی بهره برده و این نکته را باید در نظر گرفت که حل به روش تبدیل دیفرانسیلی (DTM) از حجم کمتری از محاسبات برخوردار است. در ادامه، نتایج عددی بدست آمده از این روش‌ها (جدول ۲)، در شکل ۲ ارائه می‌گردد. همچنین با توجه به شکل ۲ (یا مقادیر جدول ۲)، با در نظر گرفتن مقدار هد فشاری بیش از ۰٫۵ متر بعنوان هد پایه، می‌توان دریافت که سطح آزاد نشت در فاصله ۵٫۵ متری از بالای ستون آب شکل ۱ قرار دارد. این امر از قراردادن مقادیر معلوم در رابطه‌ی (۲۸) نیز قابل محاسبه است.



شکل ۲: مقایسه نتایج بدست آمده از روش تبدیل دیفرانسیلی و روش دیگر در ستون آب یک بعدی به ارتفاع ده متر با $\varepsilon = 0.5m$



شکل ۳: مقایسه نتایج بدست آمده از روش‌های فیزیکی، حل تحلیلی و تبدیل دیفرانسیلی در ستون آب یک بعدی با $\varepsilon = 0.1m$



شکل ۴: مقایسه نتایج بدست آمده از روش‌های فیزیکی، حل تحلیلی و تبدیل دیفرانسیلی در ستون آب یک بعدی با $\varepsilon = 0.8m$

همانطور که از اشکال ۲-۴ پیداست، حل به روش فشارگسترده (EP)، تحلیلی (Analytical) و تبدیل دیفرانسیلی (DTM)، نشان‌دهنده‌ی منطقه‌ی انتقال آرام بین سطح متخلخل و خشک و سطح مرطوب است در صورتیکه این انتقال در حل به روش فیزیکی بصورت شکسته بوده و باتوجه به این امر، حل به دو روش فوق، بیانگر محل دقیق سطح آزاد نشت همانند حل به روش فیزیکی نیستند. همچنین میتوان بیان کرد که با افزایش مقدار ε ، پاسخ‌های روش تبدیل دیفرانسیلی و حل تحلیلی بر یکدیگر بیشتر منطبق می‌گردند.

۴- نتیجه گیری

در پژوهش حاضر، سعی بر آن شد تا مسأله‌ی سطح آزاد نشت در ستون یک بعدی آب شامل محیطی متخلخل که معادله‌ی حاکم بر آن همان معادله‌ی لاپلاس است، به روش تبدیل دیفرانسیلی حل گردد و نتایج آن با روش‌های موجود دیگر مانند حل فیزیکی و حل به روش فشارگسترده مقایسه گردد. برخی از یافته‌های بدست آمده از پژوهش حاضر به شرح زیر می‌باشند:

- حل به روش تبدیل دیفرانسیلی قادر به تولید جواب‌هایی بسیار نزدیک به جواب روش‌های فشارگسترده و حل تحلیلی است و این نتایج بخصوص در ستون فوقانی آب، بسیار دقیق تر از حل به روش فیزیکی می‌باشند.
- حل به روش تبدیل دیفرانسیلی که برپایه بسط سری تیلور تابع می‌باشد، از حجم محاسبات کمتری نسبت به روش فشارگسترده و روش تحلیلی برخوردار است و همین مزیتی است تا از بروز اشتباهات محاسباتی در طولانی شدن روند محاسبات پیچیده جلوگیری گردد.
- روش‌های فشار گسترده و تبدیل دیفرانسیلی و همچنین روش تحلیلی، دارای ناحیه انتقالی آرام بین محیط خشک و متخلخل و محیط مرطوب می‌باشند که این امر در مورد روش فیزیکی، بصورت ناحیه شکسته و ناگهانی می‌باشد. همین موضوع باعث می‌شود که محل دقیق سطح آزاد نشت، در روش فیزیکی، به نسبت دیگر روش‌های بیان شده، آشکارتر گردد و بتوان آن را راحت‌تر تشخیص داد.

۵- فهرست علائم

P	هد فشاری، m
y	ارتفاع، m
ε	هد پایه، m

پیوست: حل تحلیلی ستون آب یک بعدی

برای اثبات درستی حل به روش DTM، و مقایسه نتایج آن، در این بخش به حل تحلیلی مسأله نشت در ستون یک بعدی آب پرداخته‌ایم. از بخش اول معادله‌ی (۵) شروع کرده و داریم:

$$\frac{d^2 p_1}{dy^2} - \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{dp_1}{dy} = 0 \quad (30)$$

معادله‌ی دیفرانسیل معمولی فوق، یک معادله‌ی خطی همگن با ضرایب ثابت مرتبه‌ی دو با جواب عمومی $p = Ae^{\lambda y}$ است. با جایگذاری این پاسخ در معادله‌ی (۳۰) داریم:

$$Ae^{\lambda y} \left(\lambda^2 - \frac{1}{\varepsilon} \lambda \right) = 0 \quad (31)$$

بدیهی است بخش اول نمی‌تواند صفر باشد. بنابراین با صفر قراردادن پرانتز، دو جواب $\lambda = 0$ ، $\lambda = 1/\varepsilon$ به دست خواهد آمد. یعنی:

$$p_1 = c_1 e^{0y} + c_2 e^{\frac{1}{\varepsilon} y} \quad (32)$$

معادله‌ی دوم (۵) با دو بار انتگرال‌گیری مستقیم حل می‌شود. در نتیجه خواهیم داشت:

$$p_2 = c_3 y + c_4 \quad (33)$$

هنگامی که $y = d$ باشد، که d خود مقداری نامعین در محل اشتراک دو مرز p_1 و p_2 یعنی $p = \varepsilon$ است و باید از پیوستگی توابع p در $y = d$ بدست آید، می توان معادلات بدست آمده برای مقادیر p_1 و p_2 را به صورت زیر نوشت:

$$p_1 = c_3 d + c_4 = \varepsilon \quad (34)$$

$$p_2 = c_1 + c_2 e^{\frac{d}{\varepsilon}} = \varepsilon \quad (35)$$

در محل پیوستگی مرز که بیان می کند $p = \varepsilon$ است، می توانیم بنویسیم:

$$\frac{\partial p_1}{\partial y} = \frac{\partial p_2}{\partial y} \quad (36)$$

با اعمال شرط فوق یعنی مشتق گیری مرتبه اول از معادلات (34-35) نسبت به y و برابر قرار دادن آن ها خواهیم داشت:

$$c_3 = \frac{1}{\varepsilon} c_2 e^{\frac{y}{\varepsilon}} \quad (37)$$

از معادله (5) داریم که اگر $y = 0$ باشد آنگاه $p = 0$ می باشد، پس با قرار دادن شرط فوق در معادله p_1 خواهیم داشت:

$$c_1 + c_2 = 0 \quad (38)$$

همچنین دوباره از معادله (5) داریم که اگر $y = h$ در نظر گرفته شود آنگاه $p = p^*$ می باشد، پس با قرار دادن شرط فوق در معادله p_2 خواهیم داشت:

$$p^* = c_3 h + c_4 \quad (39)$$

با توجه به معادلاتی که برای ضرایب c_1 تا c_4 به دست آمده، به طور خلاصه می توانیم بنویسیم که:

$$c_3 = \left(\frac{1}{\varepsilon} e^{\frac{d}{\varepsilon}}\right) c_2$$

$$c_1 = -c_2 \quad (40)$$

$$c_4 = p^* - c_3 h = p^* - \frac{h}{\varepsilon} e^{\frac{d}{\varepsilon}} c_2$$

با جایگذاری ضرایب به دست آمده در روابط (35) و (34) همانطور که می بینیم، همه بر حسب c_2 بدست آمده و می توانیم بنویسیم که:

$$c_1 + c_2 e^{\frac{d}{\varepsilon}} = \varepsilon \xrightarrow{c_1 = -c_2} c_2 (e^{\frac{d}{\varepsilon}} - 1) = \varepsilon \quad (41)$$

در نتیجه:

$$c_2 = \frac{\varepsilon}{(e^{\frac{d}{\varepsilon}} - 1)} \quad (42)$$

با جایگذاری مقادیر بدست آمده از رابطه (40) برای c_3, c_4 در رابطه (34) می توانیم رابطه ی زیر را بدست آوریم:

$$c_2 e^{\frac{d}{\varepsilon}} = \left(\frac{d}{\varepsilon} - \frac{h}{\varepsilon}\right) + p^* = \varepsilon \quad (43)$$

با توجه به این معادله و همچنین معادلات به دست آمده برای ضرایب c و ارتباط بین آن ها طبق رابطه (40)، می توان هر ضریب c_1 تا c_4 را به طور مستقل، همانند زیر به دست آورد:

$$c_1 = -\frac{\varepsilon}{\frac{d}{e^\varepsilon - 1}} ; c_2 = \frac{\varepsilon}{\frac{d}{e^\varepsilon - 1}} ; c_3 = \frac{e^{\frac{d}{\varepsilon}}}{\frac{d}{e^\varepsilon - 1}} ; c_4 = p^* - \frac{he^{\frac{d}{\varepsilon}}}{\frac{d}{e^\varepsilon - 1}} \quad (44)$$

سپس با جایگذاری ضرایب به دست آمده از رابطه‌ی (۴۴) در معادله‌ی (۴۳) و همچنین تقسیم طرف راست بر ε و ساده‌سازی آن به معادله‌ی زیر می‌رسیم:

$$\frac{d}{\varepsilon} - \frac{h}{\varepsilon} = (1 - \frac{p^*}{\varepsilon})(1 - e^{-\frac{d}{\varepsilon}}) \quad (45)$$

همانطور که مشاهده گردید، با استفاده از حل تحلیلی، مقدار d که در ابتدا نامعلوم بود و فقط می‌دانستیم که در محل مرز مشترک p_1 و p_2 است، طبق رابطه‌ی (۴۵) بدست آمد. باتوجه به اینکه در رابطه‌ی (۴۵)، طبق فرضیات مسأله شکل ۱، مقادیر h, ε, p^* معلوم هستند، با جایگذاری آن‌ها میتوان به مقدار مجهول d دست یافت. همچنین تمامی ثوابت مجهول موجود در پاسخ و توابع مجهول فشار در هر دو بخش شکل ۱ بدست آمدند.

مراجع

- [1] USACE. Seepage analysis and control for dams. (۱۹۹۳)
- [2] Baudin, Michaël, et al. "A relaxation method for two-phase flow models with hydrodynamic closure law." *Numerische Mathematik*, vol. 99, no. 3, pp. 411-440 (2005).
- [3] Motsa, Sandile Sydney, Phumlani Goodwill Dlamini, and Melusi Khumalo. "Spectral relaxation method and spectral quasilinearization method for solving unsteady boundary layer flow problems." *Advances in Mathematical Physics* (2014).
- [4] Ayvaz, M. T., Tuncan, M., Karahan, H., & Tuncan, A. An extended pressure application for transient seepage problems with a free surface. *Journal of Porous Media*, vol. 8, no. 6, (2005)
- [5] Southwell, R. V. Relaxation methods. (1946).
- [6] Coquel, Frédéric, et al. Some new Godunov and relaxation methods for two-phase flow problems. *Godunov methods*. Springer, Boston, MA, pp. 179-188 (2001).
- [7] Harr, M. E. Groundwater and seepage. Courier Corporation. (2012)
- [8] Bathe, K. J., & Khoshgoftaar, M. R. Finite element free surface seepage analysis without mesh iteration. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 3, no.1, pp. 13-22 (1979).
- [9] Bazyar, M. H., & Graili, A. A practical and efficient numerical scheme for the analysis of steady state unconfined seepage flows. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 36, no. 16, pp. 1793-1812 (2012).

- [10] Chaiyo, K., Rattanadecho, P., & Chantasiriwan, S. The method of fundamental solutions for solving free boundary saturated seepage problem. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, vol. 38, no. 2, pp. 249-254 (2011).
- [11] Chen, J. T., Hsiao, C. C., Chiu, Y. P., & Lee, Y. T. Study of free-surface seepage problems using hypersingular equations. *Communications in numerical methods in engineering*, vol. 23, no 8, pp. 755-769 (2007).
- [12] Cividini, Annamaria, and Giancarlo Gioda. "Finite-element approach to the erosion and transport of fine particles in granular soils." *International Journal of Geomechanics*, vol. 4, no. 3, pp. 191-198 (2004).
- [13] Fengzhi, L. Scaled Boundary Finite-element Method for Seepage Free Surfaces Analysis [J]. *Chinese Journal of Computational Physics*, vol. 5 (2009).
- [14] Herreros, M., Mabssout, M., & Pastor, M. Application of level-set approach to moving interfaces and free surface problems in flow through porous media. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 195, no. 1, pp. 1-25 (2006).
- [15] Kazemzadeh-Parsi, M. J., & Daneshmand, F. Three dimensional smoothed fixed grid finite element method for the solution of unconfined seepage problems. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 64, pp. 24-35 (2013).
- [16] Kazemzadeh-Parsi, Mohammad Javad, and Farhang Daneshmand. "Unconfined seepage analysis in earth dams using smoothed fixed grid finite element method." *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 36, no. 6, pp. 780-797 (2012).
- [17] Athani, Shivakumar S., C. H. Solanki, and G. R. Dodagoudar. Seepage and stability analyses of earth dam using finite element method. *Aquatic Procedia*, vol. 4, pp. 876-883 (2015).
- [18] LI, G., GE, J., & JIE, Y. Free surface seepage analysis based on the element-free method [J]. *Journal of Tsinghua University (Science and Technology)*, vol. 11(2002)
- [19] Bazyar, Mohammad Hossein, and Abbas Talebi. "Transient seepage analysis in zoned anisotropic soils based on the scaled boundary finite-element method." *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 39, no. 1, pp. 1-22 (2015).
- [20] Jie, Yuxin, et al. "Seepage analysis based on boundary-fitted coordinate transformation method." *Computers and Geotechnics*, vol. 31, no. 4, pp. 279-283, (2004).
- [21] Zhang, Jianhong, Qianjun Xu, and Zuyu Chen. "Seepage analysis based on the unified unsaturated soil theory." *Mechanics Research Communications*, vol. 28, no. 1, pp. 107-112 (2001).
- [22] Zheng, Hong, and Hui Chao Dai. "A variational inequality formulation for unconfined seepage problems in porous media." *Applied Mathematical Modelling*, vol. 33, no. 1, pp. 437-450 (2009).
- [23] Chaiyo, Khomgris, Phadungsak Rattanadecho, and Somchart Chantasiriwan. "The method of fundamental solutions for solving free boundary saturated seepage problem." *International Communications in Heat and Mass Transfer*, vol. 38, no. 2, pp. 249-254 (2011).
- [24] Min, L., Diao, N.-r., & Fang, Z.-h. Analysis of seepage flow in a confined aquifer with a standing column well. *Journal of Hydrodynamics, Ser. B*, vol. 19, no. 1, pp. 84-91, (2007).

- [25] Leontiev, A., and W. Huacasi. "Mathematical programming approach for unconfined seepage flow problem." *Engineering analysis with boundary elements*, vol. 25, no. 1, pp. 49-56 (2001).
- [26] Naji, A., Ouazar, D., & Cheng, A.-D. Locating the saltwater-freshwater interface using nonlinear programming and h-adaptive BEM. *Engineering analysis with boundary elements*, vol. 21, no. 3, pp. 253-259 (1998).
- [27] Zhou, J. Differential transformation and its applications for electrical circuits. In: Huazhong University Press, Wuhan, China. (1986)
- [28] Ho, S. H., & Chen, C. o. K. Analysis of general elastically end restrained non-uniform beams using differential transform. *Applied Mathematical Modelling*, vol. 22, no. 5, pp. 219-234 (1998).
- [29] Chen, C. o. K., & Ho, S. H. Solving partial differential equations by two-dimensional differential transform method. *Applied Mathematics and computation*, vol. 106, no. 2, pp. 171-179 (1999).
- [30] Ayaz, F. On the two-dimensional differential transform method. *Applied Mathematics and computation*, vol. 143, no. 2, pp. 361-374 (2003).
- [31] Ayaz, F. Solutions of the system of differential equations by differential transform method. *Applied Mathematics and computation*, vol. 147, no. 2, pp. 547-567, (2004).
- [32] Bardet, J.-P., & Tobita, T. A practical method for solving free-surface seepage problems. *Computers and Geotechnics*, vol. 29, no. 6, pp. 451-475, (2002).