

بهینه‌سازی ایزو ژئومتریک شکل سازه‌های دوبعدی با استفاده از تحلیل حساسیت کاملاً تحلیلی*

مقاله علمی - پژوهشی

بهر روز حسینی^(۲)سجاد نیکویی^(۱)

چکیده در اکثر روش‌های بهینه‌سازی سازه‌ای در تحلیل سازه و محاسبه حساسیت از روش اجزای محدود مرسوم استفاده شده است. به دلیل تغییر هندسه در هر مرحله از بهینه‌سازی، برای دست‌یابی به مدل محاسباتی نیاز به تولید شبکه اجزای محدود جدیدی است که سبب افزایش هزینه محاسباتی و اتلاف وقت می‌شود. برای مرتفع نمودن مشکلات این‌چنینی، روش تحلیل ایزو ژئومتریک بر مبنای توابع پایه نریز که ترکیبی از روش طراحی به کمک کامپیوتر (CAD) و اجزای محدود است، در اینجا استفاده می‌شود. در بهینه‌سازی شکل سازه‌ها از روش مجانب‌های پویا (MMA) که روشی گرادیان محور است، استفاده شده است. در بهره‌گیری از این روش نیاز به تحلیل حساسیت طرح نسبت به متغیرهای طراحی است. به همین منظور، با توجه به ویژگی‌های توابع نریز روش تحلیل حساسیت کاملاً تحلیلی فرمول‌بندی و اجرا شده است. برای نشان دادن عملکرد روش پیشنهادی، مثال‌های عددی گوناگونی حل شده است.

واژه‌های کلیدی روش ایزو ژئومتریک، بهینه‌سازی شکل، نریز، حساسیت کاملاً تحلیلی.

Isogeometric Shape Optimization of 2D Structures Using Fully Analytical Sensitivity Analysis

S. Nikoei

B. Hassani

Abstract In most of the structural optimization approaches analysis and sensitivities are carried out by using the conventional finite element method. Due to the variations of the problem geometry within the shape optimization iterations, updating the computational model by several remeshings is required that is quite time consuming and computationally costly. As a remedy for this problem, the NURBS-based isogeometric analysis method is here adopted that combines the Computer Aided Design (CAD) and finite element techniques. In this study, in the shape optimization of the structures the Method of Moving Asymptotes (MMA), which is a gradient-based method, is employed and to calculate the required sensitivities a fully analytical approach is presented. To demonstrate the performance of the suggested approach, various numerical examples are solved.

Key Words Isogeometric Approach, Shape Optimization, NURBS, Fully Analytical Sensitivity.

* تاریخ دریافت مقاله ۹۷/۹/۲۶ تاریخ پذیرش آن ۹۹/۲/۱۱ می‌باشد.

(۱) دانشجوی دوره دکتری مهندسی هوافضا، گروه مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد.

(۲) نویسنده مسئول، استاد، گروه مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد.

مقدمه

بشر همواره در تلاش بوده تا به منظور افزایش کارایی و به‌ضرورت نیاز طراحی اجسام مختلف را بهبود بخشد. این تلاش‌ها موجب پیشرفت جامعه بشری است و می‌توان از آن به‌عنوان مبدأ بهینه‌سازی یاد نمود. امروزه به دلیل محدود بودن منابع و انرژی در دسترس، استفاده مؤثرتر از آنها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. به همین منظور، بهینه‌سازی به‌سادگی به‌عنوان ابزاری ارزشمند برای یافتن بهترین تعریف شده است. به‌عبارت‌دیگر هدف از طراحی مهندسی یافتن بهترین حل برای یک مسئله خاص است. این بدان معنی است که می‌توان بهینه‌سازی را قلب مهندسی دانست [1].

در همین راستا پیشرفت‌های چشم‌گیری در سه دهه اخیر در زمینه بهینه‌سازی شکل سازه‌ها به وجود آمده است. بهینه‌سازی شکل به فرایندی گفته می‌شود که در طی آن شکل بهینه یک سازه با استفاده از پروسه‌ای تکراری بر مبنای تحلیل پاسخ سازه‌ای و محاسبه حساسیت که در شاخه بهینه‌سازی گرادیان محور مطرح است، به دست می‌آید. در بیشتر روش‌های بهینه‌سازی سازه‌ای از روش‌های عددی گوناگونی استفاده شده است که از مشهورترین آنها می‌توان به روش تفاضل محدود (FDM)، روش اجزای محدود (FEM) و دسته‌ای از روش‌ها تحت عنوان روش‌های بدون شبکه اشاره نمود. اگرچه این روش‌ها به دنبال یکدیگر و با هدف توانمند ساختن و رفع عیوب روش‌های پیش از خود به وجود آمده‌اند، اما باز هم نمی‌توان آنها را بدون نقص در نظر گرفت. از جمله این نواقص می‌توان به نقطه‌ضعف آنها در تولید دقیق شکل مسائل دارای هندسه پیچیده، ضعف در مدل‌سازی دقیق مسائل با تغییرات شدید در خواص مصالح و همچنین نیاز به تولید مکرر شبکه المانها در برخی مسائل نظیر مسائلی که در چارچوب لاگرائژی حل می‌شوند و یا مسائل بهینه‌سازی شکل سازه، اشاره کرد. در سال‌های اخیر، با تلفیق پیشرفت‌های تکنولوژی طراحی به کمک کامپیوتر و روش اجزای محدود روش

تحلیلی جدیدی تحت عنوان روش ایزو ژئومتریک پا به عرصه تحلیل مسائل مهندسی گذاشت [2]. این بدان معناست که در روش ایزو ژئومتریک از توابع پایه یکسان جهت مدل‌سازی هندسه و تحلیل سازه استفاده می‌شود که این به‌نوبه خود باعث افزایش دقت و کارایی این روش نسبت به سایر روش‌های پیش از خود می‌شود. از آنجاکه این روش نوپا جایگزینی مناسب برای روش اجزای محدود کلاسیک است، لذا فرمول‌بندی آن در مسائل مکانیک محاسباتی ضروری است. به همین منظور، روش تحلیل ایزو ژئومتریک به‌سرعت در زمینه‌های مختلف توسعه داده شد که از میان آنها می‌توان به کاربرد آن در دینامیک سیالات [3-6]، مکانیک سازه‌ها [7-10] و الکترومغناطیس [11,12] اشاره کرد. همچنین در این زمینه کتبی به چاپ رسیده است که از میان آنها می‌توان به مرجع [13] اشاره نمود. در همین راستا، با بهره‌گیری از این روش در پیاده‌سازی الگوریتم‌های مختلف کامپیوتری می‌توان از آن به‌عنوان ابزاری قدرتمند در بهینه‌سازی سازه‌ها استفاده نمود.

بدون شک روش‌های تحلیل و طراحی مهندسی به یکدیگر وابسته‌اند. مراحل بهینه‌سازی شکل کاملاً وابسته به هندسه می‌باشند و با تغییر آن در مراحل مختلف در واقع مدل تحلیل را نیز تغییر می‌دهند. با به‌کارگیری روش ایزو ژئومتریک مدل هندسی و تحلیلی ادغام می‌گردد و بنابراین مرحله تولید مدل تحلیلی که در روش اجزای محدود، تولید شبکه اجزای محدود است، از مراحل کار حذف می‌گردد. این مرحله در صنعت بسیار زمان‌بر و پرهزینه است؛ بنابراین روش ایزو ژئومتریک نه تنها در زمینه تحلیل سازه بلکه در فرآیند طراحی سازه نیز تحولی عظیم به حساب می‌آید.

از اولین کارهای صورت گرفته در زمینه بهینه‌سازی شکل سازه‌ها می‌توان به پژوهش‌های زینکویچ در سال‌های ۱۹۷۳ [14] و ۱۹۷۵ [15] اشاره کرد. پس از آن تحقیقات فراوانی در این شاخه از علم بهینه‌سازی صورت گرفت که از میان آنها می‌توان به تحقیقات هافکا در

که روشی مبتنی بر برنامه‌ریزی ریاضی بوده و نیاز به محاسبه مقادیر مشتقات توابع هدف و قید برای حل مسئله دارد، استفاده می‌شود. به همین منظور، در هر مرحله بهینه‌سازی باید تحلیل حساسیت توابع هدف و قید نسبت به پارامترهای طراحی صورت پذیرد. برای محاسبه این حساسیت روش‌های گوناگونی وجود دارد که در این تحقیق با توجه به مزایای توابع پایه نریز، روش کاملاً تحلیلی با بهره‌گیری از روش ایزو ژئومتریک فرمول‌بندی شده است. هدف از این مقاله، بهینه‌سازی شکل سازه‌های دوبعدی با توابع هدف و قید گوناگون نظیر حداقل‌سازی حجم، مساحت، بیشترین تنش، انرژی کرنشی، بیشترین جابه‌جایی و غیره است که با محاسبه حساسیت این توابع به‌صورت کاملاً تحلیلی نتایج قابل قبولی حاصل شده است.

مقدمه‌ای بر توابع پایه نریز

این بخش به معرفی توابع و سطوح نریز اختصاص دارد و به دنبال آن توصیف کوتاهی از روش تحلیل ایزو ژئومتریک در مسائل دوبعدی خواهد آمد. برای آگاهی از جزئیات بیشتر مطالب این بخش به مرجع [32] مراجعه شود.

در ابتدای بحث، فضای پارامتری یک‌بعدی تحت عنوان دامنه $\Omega = [0, 1]$ معرفی می‌شود که اغلب به‌عنوان وصله شناخته می‌شود. فضای پارامتری در یک بعد با استفاده از بردار گرهی ξ ، که شامل مجموعه‌ای از اعداد حقیقی ($\eta_i \in \mathbb{R}$) غیر نزولی ($\eta_i \leq \eta_{i+1}$) که گره نامیده می‌شود، به بخش‌های به‌صورت رابطه (۱) تقسیم می‌شود:

$$\Xi = \{\eta_1 = 0, \dots, \eta_{n+p+1} = 1\} \quad (1)$$

که در آن $n+1$ تعداد توابع پایه اسپلاین تک متغیره تعریف شده بر روی بردار گرهی است و p درجه توابع پایه است که در ادامه توضیح داده شده است. بازه مشخصه (η_i, η_{i+1}) به‌عنوان دهانه گرهی شناخته می‌شود که در آن گره‌ها می‌توانند متمایز نباشند و طول این بازه صفر باشد. با داشتن بردار گرهی، توابع پایه بی-اسپلاین

سال‌های ۱۹۸۶ و ۱۹۹۲ [16,17] اشاره نمود. تحقیقات در این زمینه تنها به سازه‌های دوبعدی محدود نشد و دامنه آن سازه‌های سه‌بعدی را نیز در بر گرفت. محققان مختلفی از جمله امام [18]، بوتکین [19]، یونسی و همکاران [20] و آنیچاریکو [21] پژوهش‌های خود را پیرامون مسائل بهینه‌سازی سازه‌های سه‌بعدی معطوف ساختند.

بعد از پیدایش روش تحلیل ایزو ژئومتریک و استفاده از آن در حل مسائل گوناگون و وجود مشکلات متعدد روش اجزای محدود در مسائل بهینه‌سازی، توجه محققین این حوزه نیز به سمت این روش جلب شد. از جمله پژوهشگرانی که تحقیقات خود را به سمت استفاده از این روش معطوف کردند می‌توان از چو و همکاران [22] و وال و همکاران [23] نام برد. سئو و همکاران [24] مطالعات خود را با استفاده از روش ایزو ژئومتریک برای بهینه‌سازی شکل و توپولوژی بسط دادند. ناگی و همکاران [25] به بهینه‌سازی شکل و ابعاد تیر با استفاده از این روش پرداختند. تحقیق بر روی بهینه‌سازی شکل با استفاده از انتگرال مرزی و استفاده از روش ایزو ژئومتریک توسط لی و همکاران [26] ارائه شد. همچنین در کارهای متنوعی حسینی و همکاران [27,28] به بهینه‌سازی شکل سازه‌های دوبعدی و سه‌بعدی پرداختند. آنها همچنین پژوهشی دیگر [29] پیرامون بهینه‌سازی هم‌زمان شکل و توپولوژی پوسته‌ها با استفاده از روش ایزو ژئومتریک ارائه دادند. لیان و همکاران [30] با ترکیب روش ایزو ژئومتریک و اجزای مرزی و با استفاده از الگوریتم مجانب‌های پویا به بهینه‌سازی شکل سازه‌های دوبعدی پرداختند. سان و همکاران [31] از همان روش ولی از روش انبوه‌ذرات در بهینه‌سازی سازه‌های دوبعدی استفاده نمودند.

در این پژوهش، به بهینه‌سازی شکل سازه‌های دوبعدی تحت شرایط تنش مسطح با استفاده از روش تحلیل ایزو ژئومتریک بر مبنای توابع پایه نریز پرداخته شده است. در انجام بهینه‌سازی از روش مجانب‌های پویا

$$S(\eta, \zeta) = \sum_I^{n \times m} R_I(\eta, \zeta) P_I \quad (7)$$

منحنی‌ها و سطوح نریز این ویژگی را دارند که بتوان نقاط کنترلی جدید را به آنها افزود بدون اینکه در هندسه آنها تغییری ایجاد شود که به این کار در ادبیات موضوع بهبود شبکه گفته می‌شود. روش‌های گوناگونی مانند افزودن گره به بردار گرهی و افزایش درجه توابع پایه برای این منظور ایجاد شدند. در روش افزودن گره با اضافه کردن مقادیر جدید گره، دهانه‌های گرهی به دهانه‌های کوچک‌تری تقسیم می‌شوند. در نتیجه در این نقطه پیوستگی به اندازه واحد کاهش می‌یابد. به ازای هر یک گره جدید، یک نقطه کنترلی نیز اضافه می‌شود. نقاط کنترلی بهبود یافته با ترکیب خطی نقاط کنترلی اولیه حاصل می‌شوند. با در نظر گرفتن تابع بی-اسپلاین یک‌بعدی در صورتی که گره اضافه شده $\tilde{\eta} \in [\eta_k, \eta_{k+1}]$ باشد، نقاط کنترلی بهبود یافته $\hat{P}_i (i = 1, \dots, n+1)$ در اثر افزایش این گره با استفاده از نقاط کنترلی اولیه اثر افزایش این گره با رابطه (۸) به دست می‌آید:

$$\hat{P}_i = \beta_i P_i + (1 - \beta_i) P_{i-1} \quad (8)$$

که

$$\beta_i = \begin{cases} 1 & i \leq k - p, \\ \frac{\tilde{\eta} - \eta_i}{\eta_{p+1} - \eta_i} & k - p < i \leq k, \\ 0 & k < i. \end{cases} \quad (9)$$

بدین ترتیب می‌توان از یک شبکه نقاط کنترلی درشت بدون تغییر هندسه به شبکه ریزتری دست یافت.

تحلیل ایزو ژئومتری یک در مسائل تنش مسطح

در این بخش، معادلات حاکم بر صفحات دوبعدی و شکل ضعیف این معادلات با استفاده از روش تحلیل ایزو ژئومتری استخراج و در ادامه از آنها در بهینه‌سازی شکل این سازه‌ها استفاده می‌شود.

دامنه اجسام دوبعدی به صورت $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ است که به وسیله میدان جابه‌جایی $u(x) \in \mathbb{R}^2$ ، $x \in \Omega$ مشخص

از مرتبه $p = 0$ به صورت رابطه (۲) تعریف می‌شوند [32]:

$$N_{i,0}(\eta) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } \eta_i \leq \eta \leq \eta_{i+1} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (2)$$

توابع پایه بی-اسپلاین برای $p > 0$ با توجه به روابط بازگشتی به صورت رابطه (۳) بیان می‌شوند:

$$N_{i,p}(\eta) = \frac{\eta - \eta_i}{\eta_{i+p} - \eta_i} N_{i,p-1}(\eta) + \frac{\eta_{i+p+1} - \eta}{\eta_{i+p+1} - \eta_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\eta) \quad (3)$$

از آنجاکه این پژوهش حول مسائل تنش مسطح است، فقط به بیان روابط سطوح نریز بسنده می‌شود. سطح نریز از ترکیب خطی توابع پایه و نقاط کنترلی به دست می‌آید. سطح نریزی از درجه p در جهت η و از درجه q در جهت ζ ، با رابطه (۴) بیان می‌شود:

$$S(\eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}^{p,q}(\eta, \zeta) P_{i,j} \quad (4)$$

که در آن $\{P_{i,j}\}$ شبکه نقاط کنترلی است که در دو جهت تعریف شده است. همچنین $\{w_{i,j}\}$ وزن‌های مرتبط با نقاط کنترلی و $\{R_{i,j}^{p,q}(\eta, \zeta)\}$ توابع پایه نریز می‌باشند که بر روی بردارهای گرهی در دو جهت تعریف شده‌اند و به صورت رابطه (۵) بیان شده است:

$$R_{i,j}^{p,q}(\eta, \zeta) = \frac{N_{i,p}(\eta) N_{j,q}(\zeta) w_{i,j}}{W(\eta, \zeta)} \quad (5)$$

که $W(\eta, \zeta)$ تحت عنوان توابع وزن‌دار شناخته می‌شوند و به صورت رابطه (۶) بیان می‌شوند:

$$W(\eta, \zeta) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m N_{k,p}(\eta) N_{l,q}(\zeta) w_{k,l} \quad (6)$$

برای سادگی نوشتار، با فرض $I = (j-1)n + i$ و صرف نظر از نوشتن اندیس‌های p و q می‌توان رابطه (۴) را به صورت خلاصه نوشت:

$$= \sum_{k=1}^{Ngp} B_k^T D B_k |J_k| W_k \quad (17)$$

B با توجه به (۱۵) به صورت (۱۸) بازنویسی می شود:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_1}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial R_{ne}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial R_1}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial R_{ne}}{\partial y} \\ \frac{\partial R_1}{\partial y} & \frac{\partial R_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial R_{ne}}{\partial y} & \frac{\partial R_{ne}}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (18)$$

که $ne = (p+1)(q+1)$ است. همچنین F بردار نیرو است که به صورت رابطه (۱۹) بیان می شود:

$$F = \int_{\Omega} R^T b d\Omega + \int_{\Gamma} R^T t d\Gamma \quad (19)$$

در رابطه (۱۷)، D ماتریس ساختار، [ژاکوبین و |J|] درمینان ژاکوبین است که به ترتیب در روابط (۲۰)، (۲۱) و (۲۲) بیان شده اند. همچنین، W_k وزن نقاط انتگرالی و Ngp تعداد نقاط انتگرالی گوسی در هر المان است.

$$D = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (20)$$

که E مدول الاستیسیته و ν ضریب پواسون هستند.

$$J = J_{T_1} J_{T_2} = \begin{bmatrix} \eta_{,s} & \zeta_{,s} \\ \eta_{,t} & \zeta_{,t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{,\eta} & y_{,\eta} \\ x_{,\zeta} & y_{,\zeta} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\zeta_{i+1} - \zeta_i}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum R_{i,\eta} x_i & \sum R_{i,\eta} y_i \\ \sum R_{i,\zeta} x_i & \sum R_{i,\zeta} y_i \end{bmatrix} \quad (21)$$

که s و t مؤلفه های مختصات المان پایه و x_i و y_i مختصات نقاط کنترلی هستند. همچنین T_1 انتقال خطی از نقاط انتگرالی المان پایه به فضای پارامتری و T_2 انتقال خطی از فضای پارامتری به فضای فیزیکی است.

$$|J| = |J_{T_1}| |J_{T_2}| = \begin{vmatrix} \eta_{,s} & \zeta_{,s} \\ \eta_{,t} & \zeta_{,t} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_{,\eta} & y_{,\eta} \\ x_{,\zeta} & y_{,\zeta} \end{vmatrix}$$

می شود. با فرض تغییر شکل های کوچک یا ضخیم به صورت کرنش خطی رابطه (۱۰) بیان می شود:

$$\varepsilon = \nabla u = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^T) \quad (10)$$

رابطه کار مجازی به صورت (۱۱) بیان می شود:

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon^T \sigma d\Omega - \int_{\Omega} \delta u^T b d\Omega - \int_{\Gamma} \delta u^T t d\Gamma = 0 \quad (11)$$

که σ تانسور تنش و b و t به ترتیب نیروهای حجمی و سطحی می باشند. در این روش، هندسه با استفاده از سطوح نریز به صورت رابطه (۱۲) ساخته می شود:

$$x(\eta, \zeta) = \sum_I^{n \times m} R_I(\eta, \zeta) P_I = R P \quad (12)$$

همانند رابطه بالا، جابه جایی برای یک وصله با استفاده از توابع پایه نریز به صورت رابطه (۱۳) به دست می آید:

$$u(\eta, \zeta) = \sum_I^{n \times m} R_I(\eta, \zeta) q_I = R q \quad (13)$$

که بردار q متغیرهای کنترلی هستند. با استفاده از (۱۳) می توان رابطه (۱۰) را به صورت (۱۴) بازنویسی نمود:

$$\varepsilon = B q \quad (14)$$

که $B = L R$ ماتریس کرنش - جا به جایی و L ماتریس عملگر مشتق است و به صورت (۱۵) تعریف می شود:

$$L = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \quad (15)$$

با جایگذاری (۱۳) و (۱۴) در (۱۱) دستگاه معادلات جبری به شکل ماتریسی (۱۶) تبدیل خواهد شد:

$$K q = F \quad (16)$$

که در آن K ماتریس سختی کلی سازه است و برای هر المان به صورت رابطه (۱۷) به دست می آید:

$$K_e = \int_{\Omega} B^T D B d\Omega = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B^T D B |J| d\eta d\zeta$$

که در آن تابع هدف \mathcal{J} تابعی از متغیرهای حالت مانند جابه‌جایی q و متغیرهای طراحی x است. همچنین، n_1 قیود مساوی، g_k قیود نامساوی، n_1 تعداد قیود مساوی، n_k تعداد قیود نامساوی، x_j^{\min} و x_j^{\max} به ترتیب حد پایین و بالای متغیرهای طراحی و n_j تعداد متغیرهای طراحی در مسئله بهینه‌سازی هستند.

با توسعه روش ایزوژئومتریکی در بهینه‌سازی شکل، مدل هندسی ساخته شده که متشکل از شبکه نقاط کنترلی است، هم برای انجام تحلیل و هم برای پارامتر سازی بهینه‌سازی شکل به کار می‌رود. به عبارت دیگر مختصات نقاط کنترلی که در نرَبز برای تولید هندسه و در تحلیل ایزوژئومتریکی برای تقریب تغییر مکان مورد استفاده قرار می‌گرفت، در بهینه‌سازی شکل کاربرد سومی هم پیدا می‌کند که همان نقش متغیرهای طراحی مسئله بهینه‌سازی است. به این ترتیب در هر گام بهینه‌سازی موقعیت این نقاط می‌تواند به‌عنوان متغیر طراحی مسئله بهینه‌سازی شکل استفاده شود. توجه شود که با این کار دیگر نیازی به ساخت مدل اجزای محدود برای تحلیل و صرف هزینه‌های بالا برای تولید شبکه اجزای محدود مرتفع می‌شود.

برای حل کلی یک مسئله بهینه‌سازی دو روش وجود دارد: (۱) روش بر مبنای گرادیان، (۲) روش بر مبنای غیرگرادیان. تمرکز این پژوهش بر روی روش بر مبنای گرادیان است که استفاده از آن مستلزم پاسخ سازه و تحلیل حساسیت آن نسبت به متغیرهای طراحی است و برای انجام آن از روش مجانب‌های پویا (MMA) بهره گرفته شده است. این روش یک روش بهینه‌سازی بر مبنای برنامه‌ریزی ریاضی است که با استفاده از اطلاعات مشتقات توابع هدف و قید، زیر مسئله‌ای محدب و تفکیک‌پذیر تولید می‌کند و سپس زیر مسئله را حل می‌کند. جواب به‌دست‌آمده به‌عنوان نقطه شروع در گام بعدی بهینه‌سازی مورد استفاده قرار می‌گیرد و این کار تا حصول همگرایی ادامه پیدا می‌کند. برای اطلاعات بیشتر در مورد نحوه کار این روش می‌توان به مرجع [33]

$$= 0.25(\eta_{i+1} - \eta_i)(\zeta_{i+1} - \zeta_i) \left\{ \left(\sum R_{i,\eta} x_i \sum R_{i,\zeta} y_i \right) - \left(\sum R_{i,\eta} y_i \sum R_{i,\zeta} x_i \right) \right\} \quad (22)$$

بهینه‌سازی شکل

در این بخش به بیان روابط بهینه‌سازی ایزوژئومتریکی شکل سازه‌های دوبعدی پرداخته خواهد شد. هدف از بهینه‌سازی شکل سازه، یافتن هندسه مرزهای سازه است به‌گونه‌ای که رفتار خاصی از سازه در بهترین وضعیت باشد. معمولاً این مسائل دارای قیدهای رفتاری و هندسی نیز می‌باشند که از آن جمله می‌توان به محدودیت تنش‌ها، تغییر مکانها و محدودیت‌های هندسی اشاره نمود. همچنین وزن، انرژی کرنشی ذخیره شده و مقادیر فرکانس‌های طبیعی سازه از جمله توابع هدف مسائل بهینه‌سازی شکل می‌باشند. در این بخش پس از معرفی بهینه‌سازی، مسئله بهینه‌سازی ایزوژئومتریکی شکل تشریح خواهد شد. سپس روش بهینه‌سازی مورد استفاده به همراه تحلیل حساسیت تحلیلی برای مسائل این بخش فرمول‌بندی خواهند شد.

در مسئله بهینه‌سازی بایستی ابتدا تابعی را با عنوان تابع هدف مشخص و سپس با یک الگوریتم بهینه‌سازی و با توجه به قیود حاکم بر مسئله اقدام به حل آن نمود. در بهینه‌سازی شکل توابع متنوعی را می‌توان به‌عنوان تابع هدف تعریف نمود. در صورتی که مسئله بهینه‌سازی قید داشته یا نداشته باشد، آن را مقید یا نامقید می‌نامند. البته در بیشتر مسائل بهینه‌سازی سازه‌ها، مسائل به‌صورت مقید در نظر گرفته می‌شوند. با توجه به این توضیحات، یک مسئله بهینه‌سازی را می‌توان به شکل رابطه (۲۳) نشان داد:

$$\begin{cases} \text{تابع هدف} & \min \mathcal{J}(x, q(x)) \\ \text{قیود} & \begin{cases} h_l(x, q(x)) = 0, & l = 1, \dots, n_l \\ g_k(x, q(x)) \leq 0, & k = 1, \dots, n_k \\ x_j^{\min} \leq x_j \leq x_j^{\max}, & j = 1, \dots, n_j \end{cases} \end{cases} \quad (23)$$

مراجعه نمود.

حساسیت این تابع نسبت به متغیرهای طراحی که در اینجا مختصات نقاط کنترلی هستند، با استفاده از (۲۴) به صورت (۲۷) به دست می‌آید؛ اما در ابتدا شکل گسسته‌سازی شده این تابع به صورت (۲۶) بیان می‌شود:

$$\mathfrak{S}(x, q(x)) = F^T q \quad (26)$$

که F بردار نیرو در دستگاه معادلات خطی و q بردار جابه‌جایی است. با در نظر گرفتن بردار نیرو به صورت نیروی متمرکز مشتقات آن نسبت به متغیرهای طراحی حذف می‌شوند. لذا، حساسیت انرژی کرنشی نسبت به متغیرهای طراحی به صورت رابطه (۲۷) بیان می‌شود:

$$\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial x} = F^T \frac{\partial q}{\partial x} = -F^T K^{-1} \frac{\partial K}{\partial x} q = -q^T \frac{\partial K}{\partial x} q \quad (27)$$

برای محاسبه مشتقات ماتریس سختی المان نسبت به متغیرهای طراحی $\left(\frac{\partial K}{\partial x}\right)$ با استفاده از ماتریس سختی المان K_e ، که کهر رابطه (۱۷) معرفی شده است، می‌توان این مشتقات را به صورت رابطه (۲۸) نوشت:

$$\frac{\partial K_e}{\partial x} = \sum_{k=1}^{N_{gp}} \left[\frac{\partial B_k^T}{\partial x} D B_k |J_k| W_k + B_k^T D \frac{\partial B_k}{\partial x} |J_k| W_k + B_k^T D B_k \frac{\partial |J_k|}{\partial x} W_k \right] \quad (28)$$

همان‌طور که در بخش‌های گذشته توضیح داده شد دو انتقال برای محاسبه انتگرال عددی وجود داشت که تنها J_{T_2} به مختصات نقاط کنترلی، به‌عنوان متغیرهای طراحی، وابسته است درحالی‌که J_{T_1} مستقل از متغیرهای طراحی است. لذا، مشتق درمیان ژاکوبین $\frac{\partial |J_k|}{\partial x}$ به صورت رابطه (۲۹) تبدیل خواهد شد:

$$\frac{\partial |J_k|}{\partial x} = |J_{T_1}| \frac{\partial |J_{T_2}|}{\partial x} \quad (29)$$

تابع دیگری که در بهینه‌سازی شکل سازه‌ها می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد حداکثر تنش موجود در سازه است که با حداقل‌سازی آن می‌توان به سازه بهینه‌ای دست‌یافت. در این پژوهش از حداکثر تنش ون-میزر

تحلیل حساسیت

تحلیل حساسیت به معنی بررسی میزان وابستگی طرح نسبت به هر پارامتر تأثیرگذار در آن است. در مسائل بهینه‌سازی این اصطلاح به معنی سنجش میزان تغییرات تابع هدف نسبت به هر یک از متغیرهای طراحی است که در واقع به معنی پیدا کردن مشتق تابع هدف نسبت به آن متغیر است. در حالت کلی سه دسته روش برای انجام تحلیل حساسیت وجود دارد: روش‌های عددی، نیمه‌تحلیلی و تحلیلی. در روش‌های عددی مشتقات توابع هدف و قید را با استفاده از روش‌های مختلف عددی مانند تفاضلات محدود به دست می‌آورند. در روش‌های نیمه‌تحلیلی بخشی از عملیات یافتن مشتقات به صورت تحلیلی و بخشی با روش‌های عددی انجام می‌شود. در روش‌های تحلیلی که در این پژوهش مورد استفاده قرار گرفته است، مقادیر مشتقات با توابع صریح بر حسب متغیرهای طراحی مسئله به دست می‌آیند.

حساسیت تابع هدف نسبت به متغیرهای طراحی با توجه به (۱۶) به صورت رابطه (۲۴) حاصل می‌گردد:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{S}(x, q(x))}{dx} &= \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x} \\ &= \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial q} K^{-1} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial K}{\partial x} q \right) \\ &= \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial x} + \theta^T \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial K}{\partial x} q \right) \end{aligned} \quad (24)$$

که در آن θ متغیر الحاقی است که از حل دستگاه معادله الحاقی به صورت رابطه (۲۵) به دست می‌آید:

$$K\theta = \left(\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial q} \right)^T \quad (25)$$

در مسائل بهینه‌سازی شکل سازه‌ها موارد مختلفی را می‌توان به‌عنوان تابع هدف و قید در نظر گرفت. یکی از رایج‌ترین فرمولاسیون استفاده شده برای بهینه‌سازی شکل سازه‌ها حداقل‌سازی انرژی کرنشی است.

است.

با توجه به روابط به دست آمده برای رفتار محلی تنش، می‌توان حساسیت آن را نسبت به متغیرهای طراحی به صورت رابطه (۳۴) به دست آورد:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dx} &= \frac{\partial\sigma}{\partial x} + \frac{\partial\sigma}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x} = D \frac{\partial B}{\partial x} \Lambda q + DB \Lambda \frac{\partial q}{\partial x} \\ &= D \frac{\partial B}{\partial x} \Lambda q - DB \Lambda K^{-1} \frac{\partial K}{\partial x} q \\ &= D \frac{\partial B}{\partial x} \Lambda q - \vartheta^T \frac{\partial K}{\partial x} q \end{aligned} \quad (34)$$

که ϑ همانند رابطه (۲۴) با حل دستگاه معادله الحاقی (۳۵) به دست می‌آید.

$$K\vartheta = (DB\Lambda)^T \quad (35)$$

در بسیار از مسائل سه‌بعدی و دوبعدی نیاز به حداقل سازی حجم و مساحت است. از آنجایی که در این پژوهش بررسی مسائل دوبعدی مد نظر است، لذا روابط مورد نیاز برای حداقل سازی مساحت به صورت رابطه (۳۶) استخراج می‌گردد:

$$A = \int_{\Omega} d\Omega = \int_{\Omega} |J| d\eta d\zeta = \sum_{k=1}^{Ngp} |J_k| W_k \quad (36)$$

مشتقات A نسبت به متغیرهای طراحی به صورت رابطه (۳۷) بیان می‌شود:

$$\frac{dA}{dx} = \int_{\Omega} \frac{\partial |J|}{\partial x} d\eta d\zeta = \sum_{k=1}^{Ngp} \frac{\partial |J_k|}{\partial x} W_k \quad (37)$$

محاسبه حساسیت با استفاده از روش تحلیل

همان‌طور که دیده شد، در مسائل مختلف لازمه تحلیل حساسیت محاسبه مشتقات توابع مختلف نسبت به متغیرهای طراحی است. در بخش قبل مشتقات توابع مختلف به دست آمد و دیده شد که باید برای محاسبه $\frac{\partial |J|}{\partial x}$ و $\frac{\partial B}{\partial x}$ چاره‌ای اندیشید. از این رو، در این بخش به محاسبه این مجهولات به صورت تحلیل پرداخته می‌شود. برای محاسبه مشتقات در ابتدا نیاز به تعریف دو ماتریس Ψ و $\tilde{\Psi}$ به صورت روابط (۳۸) و (۳۹) است:

رابطه (۳۰) استفاده شده است:

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 3\sigma_{12}^2 - \sigma_1\sigma_2} = \left(\frac{\sigma^T \sigma}{2}\right)^{0.5} \quad (30)$$

بردار تنشی $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, (\sigma_1 - \sigma_2), \sqrt{6}\sigma_{12}\}^T$ است. در ادامه مشتقات تنش ون-میزر نسبت به متغیرهای طراحی به صورت رابطه (۳۱) حاصل می‌گردند:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{VM}}{dx} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{\sigma^T \sigma}{2}\right)^{0.5} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{d\sigma^T}{dx} \sigma + \sigma^T \frac{d\sigma}{dx} \right) \times \left(\frac{\sigma^T \sigma}{2}\right)^{-0.5} \\ &= \frac{1}{2} \sigma^T \frac{d\sigma}{dx} \times \frac{1}{\sigma_{VM}} = \frac{1}{2\sigma_{VM}} \sigma^T \frac{d\sigma}{dx} \end{aligned} \quad (31)$$

که با جایگذاری بردار تنش σ در رابطه (۳۱)، رابطه (۳۲) به دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{VM}}{dx} &= \frac{1}{2\sigma_{VM}} \left\{ \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_1 - \sigma_2 \\ \sqrt{6}\sigma_{12} \end{matrix} \right\} \left\{ \frac{d\sigma_1}{dx}, \frac{d\sigma_2}{dx}, \frac{d(\sigma_1 - \sigma_2)}{dx}, \sqrt{6} \frac{d\sigma_{12}}{dx} \right\} \\ &= \frac{1}{2\sigma_{VM}} \left((2\sigma_1 - \sigma_2) \frac{d\sigma_1}{dx} + (2\sigma_2 - \sigma_1) \frac{d\sigma_2}{dx} + 6\sigma_{12} \frac{d\sigma_{12}}{dx} \right) \end{aligned} \quad (32)$$

برای محاسبه معادله (۳۲) می‌بایست مشتقات مؤلفه‌های تنش به دست آید. بدین منظور، بردار تنش محلی در نقطه‌ای که تنش بیشترین مقدار خود را دارد با توجه به روابط (۱۳)، (۱۴) و (۲۰) و قانون هوک به صورت رابطه (۳۳) بیان می‌شود:

$$\sigma_{max} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = D\varepsilon = DBd = DB\Lambda q \quad (33)$$

توجه شود که بیشترین تنش رفتار محلی از سازه مورد نظر است درحالی که انرژی کرنشی بیان‌گری رفتار کلی آن است. پس d بردار جابه‌جایی محلی نقاط کنترلی مرتبط با نقطه‌ای که بیشترین تنش در آن رخ می‌دهد درحالی که q جابه‌جایی کلی است. همچنین، Λ ماتریس تبدیل بردار جابه‌جایی کلی به بردار جابه‌جایی محلی

داشتن روابط (۴۱) و (۴۴) می توان مشتق درمینیان ژاکوبین را به صورت رابطه (۴۷) به دست آورد:

$$|J'| = |J| \text{tr}(J^{-1}J') = |J| \text{tr}(J^{-1}\tilde{\Psi}\tilde{P}') = |J| \text{tr}(\Psi\tilde{P}') \quad (۴۷)$$

با توسعه روش ایزو ژئومتریک در بهینه سازی شکل، مدل هندسی ساخته شده که متشکل از شبکه نقاط کنترلی است، هم برای انجام تحلیل و هم برای پارامترسازی بهینه سازی شکل به کار می رود. به عبارت دیگر مختصات نقاط کنترلی که در نرئز برای تولید هندسه و در تحلیل ایزو ژئومتریک برای تقریب تغییر مکان مورد استفاده قرار می گرفت، در بهینه سازی شکل کاربرد سومی هم پیدا می کند که همان نقش متغیرهای طراحی مسئله بهینه سازی است. به این ترتیب در هر گام بهینه سازی موقعیت این نقاط می تواند به عنوان متغیر طراحی مسئله بهینه سازی شکل استفاده شود. توجه شود که با این کار دیگر نیازی به ساخت مدل اجزای محدود برای تحلیل و صرف هزینه های بالا برای تولید شبکه اجزای محدود مرتفع می شود. در هر گام بهینه سازی پس از ساخت مدل طراحی، با انجام بهبود شبکه، مدل تحلیلی ساخته می شود و تحلیل با استفاده از این مدل انجام می گیرد. در نهایت پس از انجام تحلیل حساسیت، بهینه سازی شکل انجام می گیرد که در واقع بهبود مدل طراحی است. این کار تا همگرا شدن طرح ادامه پیدا می کند.

نتایج و بحث

در این بخش، برای نشان دادن دقت و کارایی روش ارائه شده چندین مثال بهینه سازی شکل با استفاده از روش کاملاً تحلیلی در بررسی حساسیت و بهره گیری از روش ایزو ژئومتریک در مسائل دوبعدی تحت بارگذاری استاتیکی و شرایط تنش مسطح آورده شده است. هندسه تمامی مثالها با استفاده از توابع نرئز مدل سازی شده است. همچنین از روش مجانب های پویا به عنوان حلگر بهینه سازی استفاده شده است [33]. معیار همگرایی استفاده شده در این مثالها تغییرات تابع هدف است که

$$\Psi = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_1}{\partial x} & \frac{\partial R_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial R_{ne}}{\partial x} \\ \frac{\partial R_1}{\partial y} & \frac{\partial R_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial R_{ne}}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (۳۸)$$

$$\tilde{\Psi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_1}{\partial \eta} & \frac{\partial R_2}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial R_{ne}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial R_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial R_2}{\partial \zeta} & \dots & \frac{\partial R_{ne}}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (۳۹)$$

همچنین، ماتریس دیگر که شامل چیدمان جدیدی از مختصات نقاط کنترلی هندسی است به صورت رابطه (۴۰) تعریف می شود:

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{nm} \\ y_{11} & y_{21} & \dots & y_{nm} \end{bmatrix}^T \quad (۴۰)$$

با کمی دقت در روابط (۳۸)، (۳۹) و (۴۰)، رابطه (۴۱) به دست می آید:

$$\tilde{\Psi} = J\Psi, \quad (۴۱)$$

$$J = \tilde{\Psi}\tilde{P}'. \quad (۴۲)$$

توجه شود که برای سادگی در نوشتار به جای $\frac{\partial}{\partial x}$ از علامت پریم (´) استفاده می شود. همچنین، کاملاً مشخص است که ماتریس $\tilde{\Psi}$ نسبت به متغیرهای طراحی دارای مشتق نیست (رابطه (۴۳)):

$$\tilde{\Psi}' = J'\Psi + J\Psi' = 0 \quad (۴۳)$$

$$J' = \tilde{\Psi}\tilde{P}' \quad (۴۴)$$

با به کارگیری روابط (۴۴-۴۱) می توان به آسانی به رابطه (۴۵) دست یافت:

$$\Psi' = -J^{-1}J'\Psi = -J^{-1}\tilde{\Psi}\tilde{P}'\Psi = -\Psi\tilde{P}'\Psi \quad (۴۵)$$

با توجه به روابط موجود در جبر خطی به سادگی مشتق درمینیان ماتریس دلخواه M به صورت رابطه (۴۶) به دست می آید:

$$|M'| = |M| \text{tr}(M^{-1}M') \quad (۴۶)$$

که عملگر tr جمع قطر اصلی یک ماتریس را به دست می دهد. با توجه به رابطه (۴۶) و همچنین در نظر

صفحه بزرگ تحت تنش دو محوری با مقدار $\sigma_x = 2.5 \text{ kN.m}^{-1}$ قرار دارد. به دلیل تقارن تنها یک‌چهارم این صفحه مدل شده است (شکل (۱-ب)). طراحی اولیه و گسسته‌سازی شده این صفحه در شکل (۱-پ) با دو المان (دهانه گرهی) و ۱۲ نقطه کنترلی که دو نقطه کنترلی تکراری می‌باشند، با استفاده از توابع نریز مرتبه دو مدل‌سازی شده است. بردارهای گرهی استفاده شده برای این صفحه به صورت رابطه (۴۹) در نظر گرفته شده است.

$$H = \{0,0,0,1,1,1\} \quad E = \{0,0,0,0.5,1,1,1\}, \quad (49)$$

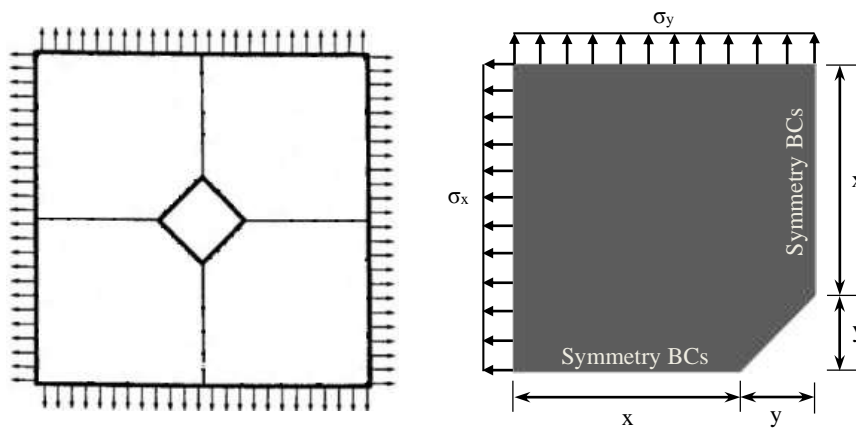
به صورت رابطه (۴۸) مورد استفاده قرار گرفته است:

$$\epsilon_0 = \left| \frac{\zeta^{(k)} - \zeta^{(k-1)}}{\zeta^{(0)}} \right| \quad (48)$$

که در آن $\zeta^{(k)}$ مقدار تابع هدف در تکرار k ام است.

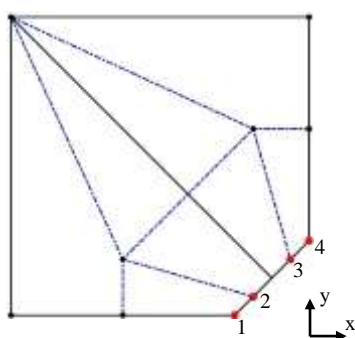
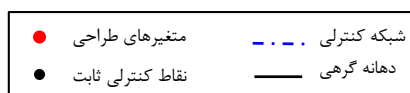
مثال اول (صفحه با حفره میانی)

در این مثال که مثالی کلاسیک از بهینه‌سازی شکل سازه‌های دوبعدی است، به بهینه‌سازی شکل مرزهای حفره داخلی صفحه با شرایط تنش مسطح که در شکل (۱-الف) نشان داده شده است، پرداخته می‌شود. این

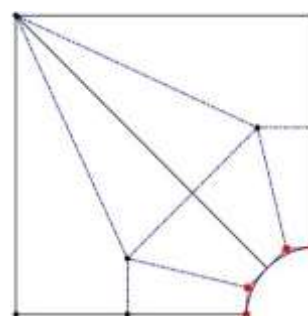


(الف)

(ب)



(پ)



(د)

شکل «۱»: تعریف مسئله برای ورق با حفره میانی (الف) هندسه کامل صفحه با بارگذاری (ب) یک‌چهارم هندسه و بارگذاری صفحه (پ) طراحی اولیه و گسسته‌سازی با استفاده از توابع نریز (د) طراحی بهینه

جدول «۱»: تغییرات متغیرهای طراحی در مسئله صفحه با حفره میانی

متغیر طراحی	حد پایین	حد بالا	مقدار اولیه	مقدار بهینه
x_1	-۵۰	۰	-۲۵	-۲۲/۴۸۹
x_2	-۵۰	۰	-۱۸/۷۵	-۲۲/۴۷۹
x_3	-۵۰	۰	-۶/۲۵	-۸/۹۸۷
y_2	۰	۵۰	۶/۲۵	۸/۹۹۹
y_3	۰	۵۰	۱۸/۷۵	۲۲/۴۷۲
y_4	۰	۵۰	۲۵	۲۲/۴۸۳

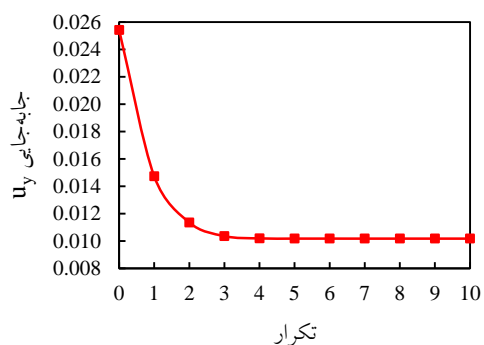
مثال دوم (تیر یکسر گیردار)

هدف از این مثال طراحی تیر یکسر گیرداری است که جابه‌جایی عمودی انتهای آن u_y در محل اعمال بار متمرکز $F = 10$ واحد تحت اعمال قید حجمی مینیمم باشد (شکل (۲-الف)). طراحی اولیه این تیر با طول $l = 30$ و ارتفاع مجاز $10 \leq b \leq 1.5$ در نظر گرفته شده است. در طول بهینه‌سازی شکل سازه قید حجمی با فرض $V \leq 0.7V_{max}$ که بیشترین مساحت اولیه و برابر با 300 است، اعمال می‌شود. طرح اولیه تیر با فرض $b = 6$ در نظر گرفته می‌شود. هندسه تیر با استفاده از توابع مرتبه دو در هر دو جهت η و ζ با 6×3 نقطه کنترلی مدل‌سازی و تحلیل اولیه شده است (شکل (۲-ب)). مدول الاستیسیته و ضریب پواسون به ترتیب برابر با $E = 200 \times 10^3$ واحد و $\nu = 0.3$ در نظر گرفته شده‌اند.

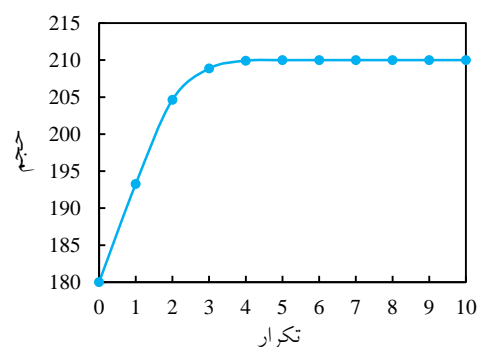
در بهینه‌سازی شکل سازه مختصات عمودی u_y نقاط کنترلی لبه بالایی به‌عنوان متغیر طراحی در نظر گرفته می‌شود. برای به‌روز کردن مختصات نقاط کنترلی میانی نسبت به نقاط کنترلی بالایی از نسبت ۱ به ۲ استفاده شده است. هندسه سازه بهینه‌شده بعد از ۶ مرحله بهینه‌سازی، در شکل‌های (۲-پ) و (۲-د) نشان داده شده است، به دست می‌آید.

همچنین، نمودار تاریخچه همگرایی جا به جایی عمودی نقطه A که محل اعمال بار است و قید حجمی به ترتیب در شکل‌های (۳) و (۴) نمایش داده شده

ابعاد سازه مورد بحث در این مثال به‌صورت $x = 75 \text{ m}$ و $y = 25 \text{ m}$ انتخاب می‌شوند. همچنین، مدول الاستیسیته و ضریب پواسون به ترتیب برابر $E = 210 \times 10^3 \text{ GPa}$ و $\nu = 0.3$ فرض شده است. برای دست‌یابی به شکل بهینه این صفحه مینیمم کردن انرژی کرنشی تحت قید حجمی به‌عنوان هدف در نظر گرفته شده است. قید حجمی مورد استفاده در این مثال به‌صورت $V \leq \bar{V}$ بیان می‌شود که در آن \bar{V} معادله ۹۹٪ از حجم اولیه کل صفحه است. نقاط کنترلی که برای تعریف مرز حفره درون صفحه به کار می‌روند (نقاط ۱، ۳ و ۴) به‌عنوان متغیرهای طراحی بیان می‌شوند. بهینه‌سازی با در نظر گرفتن ۶ متغیر طراحی صورت می‌گیرد، بدین گونه که مختصات x نقاط کنترلی ۱، ۲ و ۳ و مختصات y نقاط کنترلی ۲، ۳ و ۴ به‌عنوان متغیرهای طراحی در نظر گرفته می‌شوند. نقاط کنترلی که در مرزهای تقارن واقع شده‌اند، بسته به محل قرارگیری آنها، تنها مجاز به جابه‌جایی‌های عمودی یا افقی هستند. سایر نقاط کنترلی به‌صورت ثابت فرض می‌شوند (شکل (۱-پ)). شکل بهینه این صفحه با انجام ۱۰ مرحله بهینه‌سازی به‌صورت نشان داده شده در شکل (۱-د) به دست می‌آید. همچنین، حد پایین، حد بالا، مقادیر اولیه و بهینه متغیرهای طراحی در جدول (۱) آمده است. واضح است که شکل مرز حفره درون صفحه به هندسه دایره بسیار نزدیک است.



شکل «۳»: تاریخچه همگرایی جابه‌جایی عمودی در نقطه بارگذاری شده تیر یکسر گیردار



شکل «۴»: تاریخچه همگرایی قید حجمی در تیر یکسر گیردار

جدول «۲»: تغییرات متغیرهای طراحی در مسئله تیر یکسر گیردار

متغیر طراحی	حد پایین	حد بالا	مقدار اولیه	مقدار بهینه
y_1	۱/۵	۱۰	۶	۹/۹۹۱
y_2	۱/۵	۱۰	۶	۹/۷۶۳
y_3	۱/۵	۱۰	۶	۸/۳۳۰
y_4	۱/۵	۱۰	۶	۶/۵۹۵
y_5	۱/۵	۱۰	۶	۴/۱۰۷
y_6	۱/۵	۱۰	۶	۱/۵۰۱

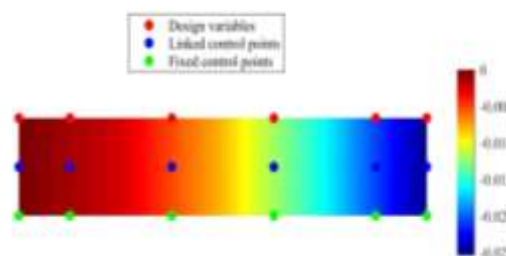
مثال سوم (آچار)

یکی از مسائلی که معمولاً در بهینه‌سازی شکل سازه‌های دوبعدی مورد بررسی قرار می‌گیرد مسئله آچار است. هدف از این مسئله طراحی شکل خارجی آن است. شکل اولیه این مثال در شکل (۵-الف) نشان داده

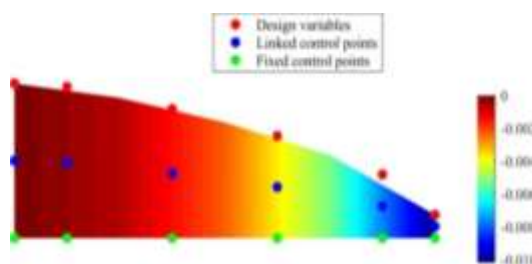
است. جدول (۲) نشان‌دهنده مقادیر اولیه، محدوده بالا و پایین و مقادیر بهینه متغیرهای طراحی است. نتایج به‌دست‌آمده از دقت مطلوبی در مقایسه با مرجع [31] برخوردار هستند.



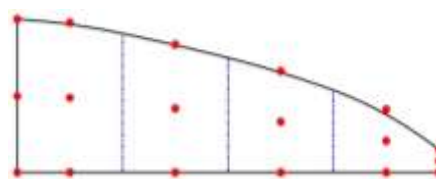
(الف)



(ب)



(پ)



(د)

شکل «۲»: تعریف مسئله برای تیر یکسر گیردار (الف) هندسه، بارگذاری و شرایط مرزی (ب) کانتور جابه‌جایی عمودی در طرح اولیه (پ) کانتور جابه‌جایی عمودی در طرح بهینه (د) طراحی بهینه به همراه گسسته‌سازی با استفاده از توابع نریز

همانند مثال اول فرض شده‌اند. هندسه اولیه مسئله با استفاده از توابع نریز تهیه شده است که در آن از توابع مرتبه ۳ در راستای افقی و از توابع مرتبه ۲ در راستای عمودی بهره گرفته شده است.

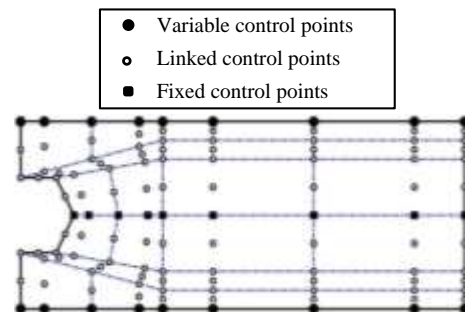
همچنین، شبکه کنترلی با استفاده از 9×13 نقطه کنترلی تشکیل شده است که از میان آنها مختصات عمودی نقاط کنترلی که در لبه بالا و پایین واقع شده‌اند به‌عنوان متغیرهای طراحی مورد استفاده قرار می‌گیرند (شکل ۵-ب)). نقاط کنترلی واقع بر خط مرکزی در این مثال ثابت فرض می‌شوند و بقیه نقاط کنترلی با توجه به تغییر متغیرهای طراحی دست‌خوش تغییر قرار می‌گیرند. در پایان، هندسه سازه بهینه‌شده بعد از انجام ۶ مرحله بهینه‌سازی که در شکل‌های (۵-پ) و (۵-د) نشان داده شده است، حاصل می‌گردد.

شده است. طول اولیه مسئله $l = 25$ واحد، بیشترین ارتفاع مجاز $b = 10$ واحد، حداقل ضخامت دسته آچار ۲ و اندازه شکل پیچ آن $a = 2$ در نظر گرفته شده است. همچنین، اندازه شکل پیچ ثابت فرض می‌شود.

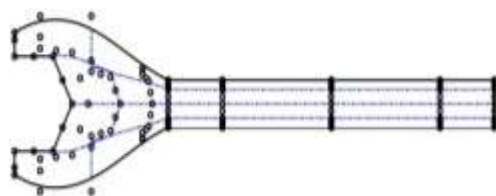
در این مسئله هدف حداقل‌سازی میزان جابه‌جایی عمودی انتهای آچار $(u_{FM} - u_{FN})$ که از دو بارگذاری مختلف ایجاد می‌شوند، تحت قید حجمی $V \leq 0.35V_{max}$ است که u_{FM} جابه‌جایی عمودی در نقطه اعمال بار F_M ، u_{FN} جابه‌جایی عمودی در نقطه اعمال بار F_N و V_{max} بیشترین مساحت اولیه و برابر با ۲۴۰ واحد است. همچنین، شرایط مرزی برای هر دو بارگذاری F_M و F_N در شکل (۵-الف) با M و N نشان داده شده است. همان‌طور که در این شکل دیده می‌شود، این دو بارگذاری و شرایط مرزیشان با یکدیگر متقارن هستند. مقدار بار اعمال شده در هر مورد بارگذاری برابر با ۱۰ در نظر گرفته شده است. مدول الاستیسیته و ضریب پواسون



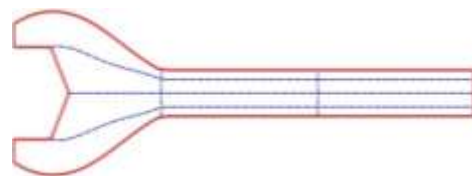
(الف)



(ب)



(پ)



(د)

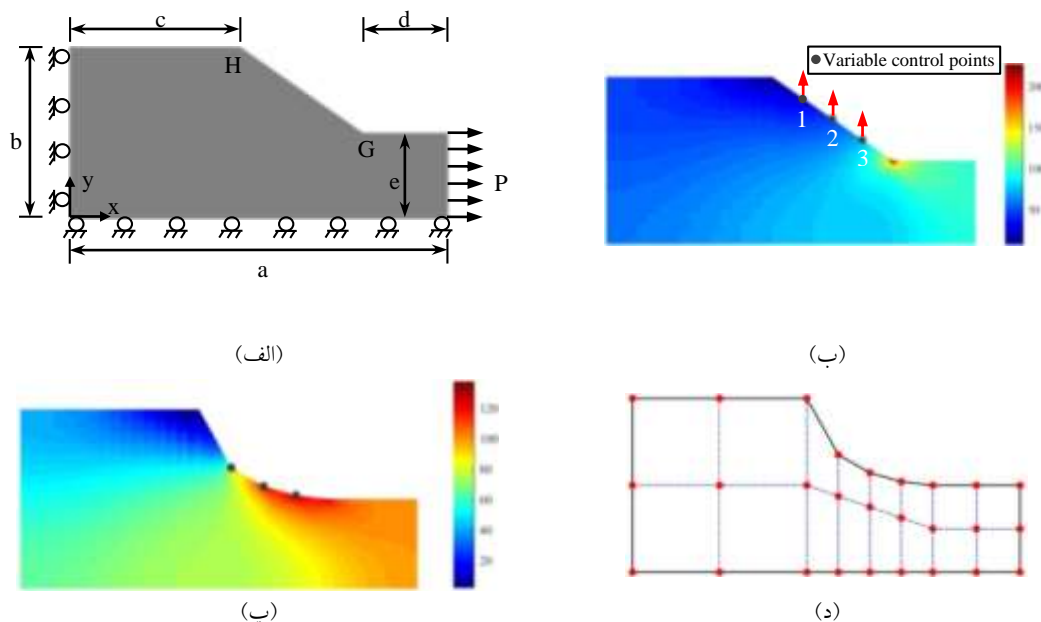
شکل ۵: تعریف مسئله برای آچار (الف) هندسه، بارگذاری و شرایط مرزی (ب) طراحی اولیه گسسته‌سازی با استفاده از توابع نریز (پ-د) طراحی بهینه

مثال چهارم (طراحی فیلت)

مثال آخر این پژوهش به بهینه‌سازی صفحه‌ای می‌پردازد که هندسه اولیه آن در شکل (۶-الف) قابل مشاهده است و در لبه سمت راست خود تحت بار گسترده $P = 100$ واحد در راستای x قرار گرفته است. به علت تقارن تنها نیمی از این سازه مورد بررسی قرار می‌گیرد. ابعاد هندسی این سازه با توجه به شکل (۶-الف) به صورت $a = 20$ ، $b = 9$ ، $c = 9$ ، $d = 4.5$ و $e = 4.5$ واحد فرض شده است. همچنین، $E = 10^7$ و $\nu = 0.3$ به عنوان خواص مواد مورد استفاده در این سازه صفحه‌ای در نظر گرفته شده است.

مسئله بهینه‌سازی شامل حداقل‌سازی مساحت فیلت این سازه تحت قید تنشی است که در اینجا از تنش ون‌میزز استفاده می‌شود و مقدار آن نباید از ۱۲۵ بیشتر شود. تحلیل تنش سازه اولیه در شکل (۶-ب) نشان داده شده است و همان‌طور که مشخص است در نقطه G تمرکز تنش وجود دارد و مقدار آن تقریباً برابر با ۲۱۰ واحد است که با تغییر شکل لبه GH باید از ایجاد تمرکز تنش در نقطه G جلوگیری شود. برای دستیابی به این

مهم نیاز است تا مختصات عمودی نقاط ۱، ۲ و ۳ که بر روی لبه GH واقع شده‌اند، به عنوان متغیر طراحی انتخاب شوند (شکل (۶-ب)). محدوده پایین و بالای این متغیرها به ترتیب برابر با $4/5$ و ۹ است. بعد از انجام ۹ مرحله بهینه‌سازی، شکل بهینه این سازه به همراه نقاط کنترلی و المانها (دهانه گرهی) در شکل (۶-د) قابل مشاهده است. با مقایسه هندسه اولیه و هندسه بهینه این صفحه واضح است که هندسه لبه GH از خط به منحنی تبدیل شده است. مساحت اولیه این سازه $145/1602$ واحد بود که بعد از بهینه‌سازی شکل به $138/4251$ واحد کاهش یافت. تحلیل تنش سازه بهینه در شکل (۶-پ) قابل رؤیت است. مشاهده می‌شود تمرکز تنش در سازه از بین رفته و بیشترین مقدار تنش ون‌میزز مجاز از ۱۲۵ واحد کمتر است. همچنین، مقادیر اولیه، محدوده بالا و پایین، مقادیر بهینه و مقایسه نتایج با مرجع [31] که از تحلیل ایزوژئومتریکی المان مرزی (IGABEM) برای تحلیل سازه و از روش انبوه ذرات (PSO) در بهینه‌سازی استفاده نموده است، در جدول (۳) آمده است.



شکل «۶»: تعریف مسئله برای طراحی فیلت (الف) هندسه، بارگذاری و شرایط مرزی (ب) کانتور توزیع تنش ون-میزز در طرح اولیه (پ) کانتور توزیع تنش ون-میزز در طرح بهینه (د) طراحی بهینه به همراه گسسته‌سازی با استفاده از توابع نربز

این کار سبب کاهش قابل ملاحظه حجم و هزینه محاسبات می‌شود. نتایج نشان می‌دهند که انعطاف‌پذیری ناشی از نرزه‌ها در روش ایزو ژئومتری که باعث تغییرات مرزها می‌شوند، سبب از بین رفتن پایداری حل نمی‌شوند؛ بنابراین به‌طور کلی می‌توان گفت که این روش بسیار ارزان‌تر و دقیق‌تر از روش‌های متداول ارزیابی می‌شود.

در این مقاله همچنین از فرمولاسیون تحلیلی برای محاسبه حساسیت که در الگوریتم‌های بهینه‌سازی بر مبنای گرادیان کاربرد دارد، در بهینه‌سازی شکل با بهره‌گیری از روش ایزو ژئومتری استفاده شده است. روش تحلیلی در این پژوهش فقط برای مسائل دوبعدی استفاده شده است ولی از آن می‌توان در مسائل سه‌بعدی نیز استفاده نمود. همچنین، حساسیت تحلیلی در تعیین اینکه آیا یک شکل مشخص بهینه است مفید و قابل کاربرد است. از این روش در بهینه‌سازی مسائل دوبعدی الاستیک تحت بارگذاری استاتیکی استفاده شد و مشاهده گردید که سازه‌های بهینه‌شده عملکرد استاتیکی بسیار بهتری نسبت به حالت اولیه خود دارند.

جدول «۳»: تغییرات متغیرهای طراحی در مسئله طراحی فیلتر

متغیر طراحی	حد پایین	حد بالا	مقدار اولیّه	مقدار بهینه	مرجع [31]
y_1	۴/۵	۹	۷/۸۷۵	۶/۰۸۳۴	۶/۲۵۱۷
y_2	۴/۵	۹	۶/۷۵۰	۵/۱۴۹۴	۵/۲۱۵۸
y_3	۴/۵	۹	۵/۶۲۵	۴/۶۸۹۷	۴/۷۰۵۷

نتیجه‌گیری

در این مقاله، به توسعه بهینه‌سازی شکل سازه‌های دوبعدی با استفاده از روش تحلیل ایزو ژئومتری بر مبنای توابع پایه نرزه پرداخته شد. تحلیل ایزو ژئومتری بر مبنای توابع پایه نرزه تقریب دقیق هندسه و دقت بالای حل را ارائه می‌دهد و همچنین تغییرات سطوح مرزی در حین بهینه‌سازی شکل نه‌تنها خللی در یکنواختی و صاف بودن آنها ایجاد نمی‌کند بلکه سبب حذف مشکلات بین پیوستگی مدل طراحی و تحلیلی می‌شود. یکی از مهم‌ترین امتیازات این روش نسبت به روش‌های متداول که از روش اجزای محدود کلاسیک استفاده می‌کنند، حذف مرحله ساخت شبکه اجزای محدود در حین مراحل بهینه‌سازی است که در هر مرحله تکرار می‌شود.

مراجع

- Hassani, B. and Hinton, E., "Homogenization and structural topology optimization: theory, practice and software", Springer Science & Business Media, (2012).
- Hughes, T.J., Cottrell, J.A., and Bazilevs, Y., "Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 194, pp. 4135-4195, (2005).
- Bazilevs, Y., Calo, V., Cottrell, J., Hughes, T., Reali, A., and Scovazzi, G., "Variational multiscale residual-based turbulence modeling for large eddy simulation of incompressible flows", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 197, pp. 173-201, (2007).
- Bazilevs, Y., Calo, V.M., Hughes, T.J., and Zhang, Y., "Isogeometric fluid-structure interaction: theory, algorithms, and computations", *Computational Mechanics*, Vol. 43, pp. 3-37, (2008).
- Gómez, H., Calo, V.M., Bazilevs, Y., and Hughes, T.J., "Isogeometric analysis of the Cahn–Hilliard phase-field model", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 197, pp. 4333-4352, (2008).

6. Buffa, A., de Falco, C., and Sangalli, G., "Isogeometric Analysis: new stable elements for the Stokes equation. To appear on Inter", *Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 65, pp. 1407-1422, (2010).
7. Auricchio, F., Da Veiga, L.B., Lovadina, C., and Reali, A., "The importance of the exact satisfaction of the incompressibility constraint in nonlinear elasticity: mixed FEMs versus NURBS-based approximations", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 199, pp. 314-323, (2010).
8. Cottrell, J.A., Reali, A., Bazilevs, Y., and Hughes, T.J., "Isogeometric analysis of structural vibrations", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 195, pp. 5257-5296, (2006).
9. Benson, D., Bazilevs, Y., Hsu, M.-C., and Hughes, T., "Isogeometric shell analysis: the Reissner–Mindlin shell", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 199, pp. 276-289, (2010).
۱۰. نیکویی، سجاد و حسنی، بهروز، "تحلیل استاتیکی و ارتعاش آزاد ایزو ژئومتریک ورق‌های چندلایه کامپوزیتی پوشیده شده از پیزوالکتریک با استفاده از نظریه رایزنر-میندلین"، *مجله علمی-پژوهشی مکانیک مدرس*، دوره هفدهم، ش. ۱۱، صص ۱۹۱-۱۸۱، (۱۳۹۶).
11. Buffa, A., Rivas, J., Sangalli, G., and Vazquez, R., "Isogeometric analysis in electromagnetics: theory and testing", Preprint, (2010).
12. Buffa, A., Sangalli, G., and Vázquez, R., "Isogeometric analysis in electromagnetics: B-splines approximation", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 199, pp. 1143-1152, (2010).
13. Cottrell, J.A., Hughes, T.J., and Bazilevs, Y., "Isogeometric analysis: toward integration of CAD and FEA", John Wiley & Sons, (2009).
14. Zienkiewicz, O. and Campbell, J., "Shape optimization and sequential linear programming", *Optimum structural design*, pp. 109-126, (1973).
15. Francavilla, A., Ramakrishnan, C., and Zienkiewicz, O., "Optimization of shape to minimize stress concentration", *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, Vol. 10, pp. 63-70, (1975).
16. Haftka, R.T. and Grandhi, R.V., "Structural shape optimization—a survey", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 57, pp. 91-106, (1986).
17. Haftka, R. and Gurdal, Z., "Elements of Structural Optimization", Kluwer Academic Publishers, (1992).
18. Imam, M.H., "Three- dimensional shape optimization", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 18, pp. 661-673, (1982).
19. Botkin, M., "Three-dimensional shape optimization using fully automatic mesh generation", *AIAA journal*, Vol. 30, pp. 1932-1934, (1992).

20. Younsi, R., Knopf-Lenoir, C., and Selman, A., "Multi-mesh and adaptivity in 3D shape optimization", *Computers & Structures*, Vol. 61, pp. 1125-1133, (1996).
21. Annicchiarico, W. and Cerrolaza, M., "Structural shape optimization 3D finite-element models based on genetic algorithms and geometric modeling", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 37, pp. 403-415, (2001).
22. Cho, S. and Ha, S.-H., "Isogeometric shape design optimization: exact geometry and enhanced sensitivity", *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 38, pp. 53, (2009).
23. Wall, W.A., Frenzel, M.A., and Cyron, C., "Isogeometric structural shape optimization", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 197, pp. 2976-2988, (2008).
24. Seo, Y.-D., Kim, H.-J., and Youn, S.-K., "Shape optimization and its extension to topological design based on isogeometric analysis", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 47, pp. 1618-1640, (2010).
25. Nagy, A.P., Abdalla, M.M., and Gürdal, Z., "Isogeometric sizing and shape optimisation of beam structures", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 199, pp. 1216-1230, (2010).
26. Li, K. and Qian, X., "Isogeometric analysis and shape optimization via boundary integral", *Computer-Aided Design*, Vol. 43, pp. 1427-1437, (2011).
27. Hassani, B., Tavakkoli, S., and Moghadam, N., "Application of isogeometric analysis in structural shape optimization", *Scientia Iranica*, Vol. 18, pp. 846-852, (2011).
28. Taheri, A.H. and Hassani, B., "Simultaneous isogeometrical shape and material design of functionally graded structures for optimal eigenfrequencies", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 277, pp. 46-80, (2014).
29. Hassani, B., Tavakkoli, S.M., and Ghasemnejad, H., "Simultaneous shape and topology optimization of shell structures", *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 48, pp. 221-233, (2013).
30. Lian, H., Kerfriden, P., and Bordas, S.P., "Implementation of regularized isogeometric boundary element methods for gradient-based shape optimization in two-dimensional linear elasticity", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 106, pp. 972-1017, (2016).
31. Sun, S., Yu, T., Nguyen, T.T., Atroshchenko, E., and Bui, T., "Structural shape optimization by IGABEM and particle swarm optimization algorithm", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 88, pp. 26-40, (2018).
32. Piegl, L. and Tiller, W., "The NURBS book", Springer Science & Business Media, (2012).
33. Svanberg, K., "The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 24, pp. 359-373, (1987).

