

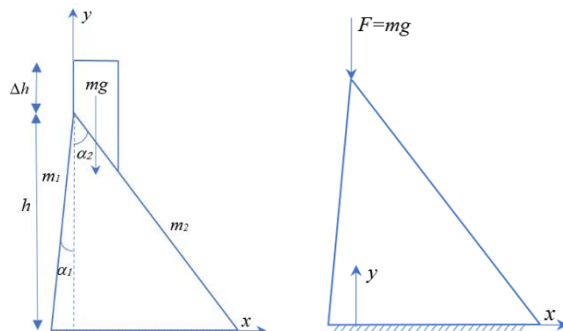
Transversely and Axial Free Vibration Analysis of Concrete Gravity Dam without Reservoir Effect using the Galerkin Method

Bahram Navayi Neya¹ 

DOI: [10.22067/jfcej.2025.89758.1320](https://doi.org/10.22067/jfcej.2025.89758.1320)

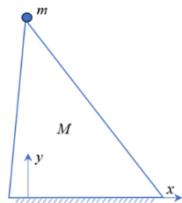
1. Introduction

A gravity dam, constructed of masonry or concrete, typically has a triangular profile, with the maximum width at the base and its apex at the crest. For the sake of simplicity, the dam is idealized as a tapered beam with a rectangular cross-section, featuring a widened section on the top to provide the required freeboard, Δh , and accessibility, as depicted in Fig. 1. These dams have long been under scrutiny owing to their simple geometry, ease of calculation, and practical implementation.

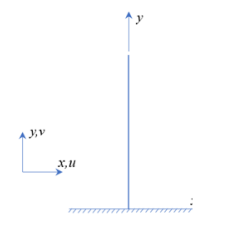


a)

b)



c)



d)

Fig. 1: Profile of the concrete gravity dam, a) with crest, b) subjected to an axial load equivalent to the weight crest, c) with an attached mass, d) equivalent cantilever beam and coordinate system.

2. Governing equations

The governing equations for the transverse and axial

vibration of the beam, based on the Euler-Bernoulli and Rayleigh theories, can be expressed as Equations (1) to (4). It is noteworthy that the harmonic motion is to be investigated in the frequency domain, with axial forces and energy dissipation being neglected.

$$E(Iu'')'' - A\omega^2 u = 0 \quad (2)$$

$$E(Iu'')'' + \rho\omega^2(Iu')' - \rho A\omega^2 u = 0 \quad (2)$$

$$E(Av')' + \rho\omega^2 Av = 0 \quad (3)$$

$$E(Av')' - \rho\omega^2 v^2(Jv')' + \rho\omega^2 Av = 0 \quad (4)$$

In these equations, the prime symbol following a displacement variable denotes its derivative with respect to a spatial coordinate. According to Fig. 1, the variable y represents the longitudinal coordinate, and $u(y)$ defines the transverse displacement of an arbitrary point along the axial direction. Furthermore, $\rho(y)$, $E(y)$, $I(y)$, $A(y)$, $v(y)$, v , and $J(y)$ stand for mass per unit volume, the elasticity modulus of the material, moment of inertia about the neutral axis, cross-sectional area, axial displacement, Poisson's ratio, and polar moment of inertia, respectively. Here, ω and $\bar{\omega}$ imply the natural frequencies of the transverse and axial vibration of the beam.

In the Galerkin method, the approximate solution is expressed as a linear combination of admissible functions within a finite-dimensional subspace in the following form.

$$\sum_{j=1}^N c_j \phi_j(y) \quad (5)$$

where the coefficients c_i indicate the unknown constants, and the functions $\phi_i(y)$ signify the known admissible functions which satisfy all the boundary conditions of the eigenvalue problem. Substituting the trial solution into the differential equations (1) to (4) generates the residual.

* Manuscript received September 12, 2024, Revised July 19, 2025, Accepted October 11, 2025.

¹ Professor, Civil Engineering Department, Babol Noshirvani University of Technology. Email: navayi@nit.ac.ir

Equations (6) to (9) are subsequently obtained by setting the weighted residual integral to zero.

$$-\omega^2 [m] \bar{c} + [k] \bar{c} = 0 \quad (6)$$

$$-\omega^2 [m - m_{\theta} - m_1] \bar{c} + [k] \bar{c} = 0 \quad (7)$$

$$[\varpi^2 m_a - k_a] \bar{c} = 0 \quad (8)$$

$$[\varpi^2 (m_a + m_{a\theta}) - k_a] \bar{c} = 0 \quad (9)$$

in which the stiffness and mass coefficients are presented in the weak form, when necessary, as follows.

$$k_{jk} = E \int_0^h (I \phi_j'')'' \phi_k dy, \quad m_{jk} = \rho \int_0^h A \phi_j \phi_k dy \quad (10)$$

$$m_{\theta jk} = \rho \int_0^h I \phi_j' \phi_k' dy, \quad m_{1jk} = \rho I(h) \phi_j'(h) \phi_k(h)$$

$$k_{aij} = E \int_0^h A \phi_{aj}' \phi_{ak}' dy, \quad m_{aij} = \rho \int_0^h A \phi_{aj} \phi_{ak} dy,$$

$$m_{a\theta jk} = \rho v^2 \int_0^h J \phi_{aj}' \phi_{ak}' dy$$

The mode shapes of the homogeneous uniform beam are reasonable to cast as the admissible functions of the trial solution. Hence, the corresponding eigenmodes in the case of transverse and axial vibration are presented in equations (11) and (12), respectively.

$$\phi_j(y) = \cos(\beta_j y) - \cosh(\beta_j y) - \quad (11)$$

$$A_0 (\sin(\beta_j y) - \sinh(\beta_j y))$$

$$\phi_{aj}(y) = \sin\left(\frac{2j-1}{2h} \pi y\right) \quad (12)$$

The value of A_0 is given by Eq. (13), while β_j is obtained by solving the characteristic equation (14) regarding the boundary conditions, $u''(h) = u'''(h) = 0$.

$$A_0 = (\cos(\beta_j h) + \cosh(\beta_j h)) / \quad (13)$$

$$(\sin(\beta_j h) + \sinh(\beta_j h))$$

$$\cos(\beta_j h) \cdot \cosh(\beta_j h) + 1 = 0 \quad (14)$$

3. Conclusion

This study confirms the accuracy and efficiency of the Galerkin method in analyzing the axial and transverse free vibration of concrete gravity dams. The key findings are as follows:

- The transverse free vibration of the tapered concrete dams is described using a combination of Bessel functions of the first and second kind, which yield nearly exact eigenvalues.
- Similarly, Bessel functions of the first kind provide an accurate characterization of the axial free vibration.

- Simulating the upper segment of the dam as a tip mass or a concentrated axial load does not significantly affect the natural frequencies of the transverse and axial free vibration. Nonetheless, modeling the superstructure as a uniform section with a constant width has a considerable effect on the eigen solution. Therefore, the widened section on the top must be taken into account.
- The Euler-Bernoulli theory yields greater eigenfrequencies compared to the Rayleigh theory. The difference is smaller in lower modes but becomes significant in higher modes, especially in the case of transverse vibration. Hence, relying on the Euler-Bernoulli theory for the free vibration analysis of dams in higher modes may lead to considerable error.



تحلیل ارتعاش آزاد جانبی و محوری سدهای بتنی وزنی بدون اثر مخزن به روش گالرکین*

مقاله پژوهشی

بهرام نوائی نیا^(۱)

DOI: 10.22067/jfcei.2025.89758.1320

چکیده در این پژوهش، تحلیل ارتعاش آزاد سدهای بتنی وزنی بدون احتساب اثر مخزن با استفاده از دو نظریه تیر اویلر - برنولی و تیر رابلی با نیمرخ متغیر مورد بررسی قرار گرفته است. برای حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر ارتعاش آزاد تیر در فضای فرکانسی از روش گالرکین استفاده شده است. به منظور متناهی شدن انتگرال مانده وزنی، شکل مود نامیرای سازه متناظر با نیمرخ ثابت به عنوان توابع قیاسی انتخاب شده است. به منظور تأمین شرط پیوستگی، ماتریس‌های جرم و سختی به شکل ضعیف بیان گردیدند که بر اساس آن دترمینان ماتریس سختی دینامیکی تعیین و به کمک آن معادله مشخصه و مقادیرهای ویژه به دست می‌آیند. برای صحت‌سنجی روش حاضر، پاسخ‌های نهایی با روش‌های تحلیلی مقایسه شده است. پس از اطمینان از دقت روش، دو نظریه مورد بررسی در تحلیل ارتعاش آزاد سدهای بتنی وزنی مورد ارزیابی قرار گرفته‌اند. مقایسه نتایج به وضوح نشان می‌دهد که برای بسامدهای بالاتر سدهای بتنی وزنی، استفاده از نظریه اویلر - برنولی باعث خطای قابل توجهی می‌شود و استفاده از نظریه رابلی ضروری است.

واژه‌های کلیدی سدهای بتنی وزنی، ارتعاش آزاد، نظریه اویلر - برنولی، نظریه رابلی، روش گالرکین.

Transversely and Axial Free Vibration Analysis of Concrete Gravity Dam without Reservoir effect Using Galerkin Method

Bahram Navayi Neya

Abstract In this study, transverse and axial free vibration analysis of Concrete Gravity Dams is presented. To achieve ordinary differential equations, the undamped governing partial differential equation of vibration of a tapered cantilever beam, based on Euler-Bernuli and Rayleigh theories are transformed to the frequency domain. Galerkin method is then used to solve the free vibration equation for an arbitrary dam geometry. The restrictions that need to be placed on the admissible functions to avoid the infinite terms in the integrals of equations depend on the order of implied differential operators. The corresponding undamped mode shapes of Euler-Bernoulli and Rayleigh beams, which satisfy essential boundary conditions, are chosen as the admissible functions to expand the trial response of the equation of motion. Validation of results shows an excellent agreement between the Galerkin method and exact solutions in this research. Numerical results of free frequency vibration for different cases based on Rayleigh and Euler-Bernoulli theories show that the frequencies of the dam do not match due to the thickness of dams, especially in higher modes. The predicted values of natural frequencies of the dam based on Rayleigh's theory are less than the values predicted by Euler-Bernoulli's theory due to the consideration of rotary inertia effect, which becomes significant in very thin dams.

Key words Concrete Gravity Dams, Free Vibration, Euler-Bernoulli Theory, Rayleigh Theory, Galerkin Method.

* تاریخ دریافت مقاله ۱۴۰۳/۲/۲۶ و تاریخ پذیرش آن ۱۴۰۴/۷/۱۹ می‌باشد.

(۱) نویسنده مسئول، استاد دانشکده مهندسی عمران دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل.

مقدمه

سدهای بتنی وزنی در ارتفاع خود دارای ضخامت متغیر هستند که به شکل آرمانی می‌توان آن را به مانند تیر غیر یکنواخت مثلثی با نیمرخ عرضی مستطیلی در نظر گرفت که مطابق شکل (۱) در رأس یا تاج خود برای دسترسی و نیز تأمین ارتفاع آزاد Δh دارای بخش فوقانی به جرم m می‌باشد که از آن به عنوان جرم فوقانی یاد می‌شود. این سدها به دلیل هندسه ساده و به تبع آن سادگی در محاسبات و نیز اجرا از دیرباز مورد توجه بسیاری از طراحان و مجریان قرار داشته است. با پیشرفت روش‌های محاسباتی و اجرایی، از نیمه دوم سده بیستم میلادی احداث سدهای بتنی وزنی در قیاس با انواع دیگر سدهای بتنی و غیر بتنی توجیه اقتصادی کمی داشت و به تدریج جایگاه خود را به ویژه در رقابت اقتصادی از دست داد و کمتر مورد توجه قرار گرفت؛ اما با معرفی سدهای بتن غلتکی کوبیده در دهه هشتم سده بیستم میلادی که می‌توان آن را گونه‌ای از سدهای بتنی وزنی دانست، تحولی شگرف در طراحی و اجرای سدهای بتنی وزنی به وجود آمد و سبب شد این نوع از سدها مجدداً مورد توجه قرار گیرند. مستقل از اینکه سدهای بتنی وزنی از نوع بتن معمولی یا بتن غلتکی کوبیده باشد، روش‌های محاسباتی و تحلیل تنش - کرنش و ارتعاش آزاد آن‌ها تا حد زیادی مشترک و شبیه هم است. لذا موضوع پژوهش حاضر که تحلیل ارتعاش آزاد سدهای بتنی وزنی است همچنان می‌تواند به عنوان موضوعی کاربردی مطرح باشد.

مسئله ارتعاش سدهای بتنی وزنی را همانند هر سازه‌ای می‌توان در گروه مسائل مقادیر ویژه و بردارهای ویژه قرار داد که از دیرباز به دلیل کاربرد وسیع آن مورد توجه پژوهشگران و طراحان قرار داشته است. ساده‌ترین نظریه در تحلیل سدهای بتنی وزنی شبیه‌سازی آن‌ها به صورت یک تیر طره می‌باشد که در صورت صلب یا انعطاف‌پذیر بودن بستر به ترتیب به صورت گیردار یا فنر معادل تحلیل می‌شود. بنابراین سابقه تحلیل این سازه‌ها به قدمت شبیه‌سازی تیرها باز می‌گردد.

تیرها به عنوان یکی از اجزای بسیار متداول سازه‌ای با رفتار یک‌بعدی به دلیل کاربرد بسیار وسیعشان در زیرشاخه‌های مختلف مهندسی همواره مورد توجه طراحان و پژوهشگران بوده است. این سازه‌ها بر اساس هندسه خود به تیرهای یکنواخت و غیر یکنواخت یا غیر منشوری و نیز تیرهای ضخیم و نازک طبقه‌بندی می‌شوند. تیرهای غیر یکنواخت در شاخه‌های مختلف

مهندسی کاربرد گسترده‌ای پیدا کرده‌اند که به عنوان نمونه می‌توان از پل‌ها، سدهای بتنی وزنی، پره توربین‌ها و هلی‌کوپترها نام برد. این تیرها دارای مساحت و ممان اینرسی متغیری می‌باشند که تغییرات آن می‌تواند به صورت پیوسته یا غیر پیوسته باشند. این نوع از تیرها ضمن اینکه از نظر زیبایی‌شناختی مورد توجه معماران هستند، به دلیل توزیع غیر یکنواخت جرم و مقاومت، متناسب با نوع بارگذاری در برخی سازه‌ها جایگزین تیرهای یکنواخت می‌شوند تا ضمن اقتصادی بودن، وظایف سازه‌ای مشخص‌تری را در تأمین نیازهای مهندسی عهده‌دار باشند. بر اساس ویژگی‌های مطرح شده، سدهای بتنی وزنی نیز به صورت تیرهای با نیمرخ قائم یا عرضی غیر یکنواخت طراحی می‌شوند که در آن از تاج سد به سمت کف سد ضخامت افزایش می‌یابد تا بدین ترتیب نیازهای مقاومتی و نیز سختی به طور مناسب‌تری در ارتفاع سد تأمین گردد. تغییرات نیمرخ سدهای بتنی در ارتفاع البته پیچیدگی‌های محاسباتی خود را به روش‌های تحلیل ارتعاش آزاد تحمیل می‌نماید.

سابقه آشنایی انسان با پدیده ارتعاش آزاد و انتشار امواج به سابقه استفاده انسان از ادوات موسیقی برمی‌گردد. آزمایش‌های گالیله (Galileo) در قرن شانزدهم میلادی روی پاندول و فنر مرتعش تحولی در اندازه‌گیری پارامترهای مؤثر بر ارتعاشات را پایه‌گذاری کرد که منجر به توسعه هر چه سریع‌تر این شاخه از علم گردید [1]. دالامبر (D'Alembert)، لاگرانژ (Lagrange)، اوایلر (Euler) و برنولی (Bernoulli) گام‌های اساسی اولیه و در ادامه کار برخی دیگر پژوهشگران به تدوین نظریه‌های متداول تیرها منجر گردید.

اگر چه تحلیل تیرها نسبت به سایر اجزای سازه‌ای نظیر صفحات و یا پوسته‌ها از پیچیدگی کمتری برخوردار می‌باشد، با این حال تحلیل تیرها با افزایش ضخامت سازه، متغیر بودن نیمرخ عرضی و نیز اضافه شدن پارامتر زمان در تحلیل دینامیکی و یا بررسی رفتار ارتعاش آزاد آن‌ها به مراتب از پیچیدگی بسیار بیشتری در مقایسه با تیرهای یکنواخت در تحلیل استاتیکی برخوردار می‌باشد. در سازه‌های ضخیم به دلیل اهمیت کرنش برشی و پیچیدگی اثر آن در روابط و نیز اثر اینرسی دورانی، ارتعاش آزاد و یا تحلیل دینامیکی همچنان مورد توجه پژوهشگران می‌باشد. در بسیاری از آیین‌نامه‌ها و استانداردها تیرهای یکنواخت ضخیم یا عمیق با نسبت طول به ضخامت کمتر

از حدود ۵ معرفی می‌گردد که در این صورت کرنش‌های برشی قابل چشم‌پوشی نمی‌باشد. در نظریه تیر اوایلر - برنولی که به نظریه مقدماتی و نظریه مهندسی تیر نیز معروف است، رفتار تیر فقط مبتنی بر حرکات خمشی تیرهای کشسان است که در آن اثر تغییر شکل برشی نادیده انگاشته می‌شود. علاوه بر این، در این نظریه، صفحات عمود بر تار خشتی در حین تغییر شکل همچنان مسطح و عمود بر تار خشتی باقی می‌مانند. با توجه به اهمیت تغییر شکل‌های برشی بر رفتار تیرهای عمیق، به‌کارگیری نظریه اوایلر - برنولی برای این تیرها با خطای زیادی همراه است [1]. این موضوع در تحلیل ارتعاش آزاد با افزایش ضخامت منجر به برآورد دست بالاتر بسامدهای طبیعی می‌گردد [2]. به منظور رفع این مشکل، نظریه رایلی (Rayleigh) برای در نظر گرفتن اثر اینرسی دورانی و نیز نظریه تیموشنکو (Timoshenko) به منظور احتساب توام اینرسی دورانی و کرنش برشی ارائه شده است.

کارهای بسیار متنوعی در خصوص تعیین ارتعاش آزاد سازه‌ها در حالت کلی و تیرها در حالت خاص صورت پذیرفته است. رایلی [2] در سال ۱۸۷۷ میلادی یک روش کلی برای تعیین فرکانس طبیعی یک سازه دل‌خواه ارائه داد که بعدها توسط ریتز (Ritz) [3] با فرض مجموعه‌ای از توابع فرضی قابل قبول که هر یک دارای ضریب مستقلی هستند تکمیل شد. این روش که به روش رایلی - ریتز مشهور شده است، یکی از روش‌های وردشی متداول در تعیین پاسخ تقریبی ارتعاش سازه‌ها به حساب می‌آید. روش گالرکین که جزء روش‌های مانده وزنی می‌باشد، در زمره روش‌های تقریبی است که برخلاف روش رایلی و رایلی - ریتز در بررسی سیستم‌های ناپایستار نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد.

عمده کارهای صورت گرفته در تحلیل دینامیکی و یا ارتعاش آزاد تیرها به تیرهای نازک اختصاص داده شده است که در آن‌ها تیرها با هندسه، شرایط تکیه‌گاهی و نیز بارگذاری متفاوت مورد بررسی قرار گرفته است. علاوه بر موضوعات اشاره شده، در سال‌های اخیر پژوهش‌ها به سمت مصالح نوین با ویژگی‌های متفاوت نظیر ناهمسانگردی و ناهمگنی، به مانند مصالح مدرج تابعی، سوق پیدا کرد که در سدهای بتنی البته هنوز موضوعیت چندانی ندارد.

در تحلیل ارتعاش آزاد تیرهای مبتنی بر نظریه اوایلر - برنولی، صرف نظر کردن از کرنش‌های برشی منجر به رسیدن به مقادیر

بزرگ‌تر بسامدهای ارتعاش آزاد در تیرهای ضخیم‌تر به ویژه در مودهای بالاتر می‌گردد که اعتبار این نظریه را تحت تأثیر قرار می‌دهد. مرور پژوهش‌های پیشین آشکارا نشان می‌دهد که پژوهشگران کمتر به بررسی مسئله ارتعاش تیرهای غیر یکنواخت پرداخته‌اند. دلیل عمده این موضوع را می‌توان به پیچیدگی تحلیل تیرهای غیر یکنواخت ناشی از وجود ضرایب متغیر حاصل از تغییرات مساحت و ممان اینرسی در معادله دیفرانسیل حاکم نسبت داد. به دلیل وجود این ضرایب متغیر، تعیین جواب تحلیلی به جز در موارد خاص ممکن نیست. مابی (Mabie) و راجرز [4] (Rogers) معادله حاکم بر ارتعاش آزاد تیر طره اوایلر - برنولی با نیمرخ غیر یکنواخت را توسعه دادند. در کار ایشان تغییرات نیمرخ تیر در ارتفاع و پلان به صورت خطی در نظر گرفته شده بود و اثر پارامترهای مختلف تغییرات نیمرخ مورد بررسی قرار گرفت. در پژوهشی دیگر [5] ارتعاش تیر طره‌ای در دو حالت عرض ثابت و تغییرات خطی ضخامت و نیز ضخامت ثابت با تغییرات خطی عرض مطالعه گردید. کارنگی و توماس (Thomas & Carnegie) [6] بسامدهای طبیعی و شکل مود ارتعاشی پره‌های طره‌ای از پیش تحت پیچش قرار گرفته را بررسی کردند که در طراحی توربین‌ها و کمپرسورها اهمیت دارند. گل (Goel) ارتعاش جانبی تیرهای با ضخامت متغیر خطی را بررسی کرد که دو لبه آن‌ها با فنرهای پیچشی الاستیک مقید شده بود [7]. هیلبر (Hibbeler) ارتعاش تیرها با تکیه‌گاه‌های ترکیبی گیردار و مفصلی را بررسی کرد [8]. در پژوهشی دیگر لو (Lau) [9] بر اساس نظریه اوایلر - برنولی پنج بسامد طبیعی اول تیره طره غیر یکنواخت را با وجود یک جرم در انتهای آزاد بررسی کرد. چنین روش شبیه‌سازی در کار حاضر نیز برای اثر جرم فوقانی سدهای بتنی وزنی، شکل (۱) مورد توجه قرار گرفته است. ایس (Ece) و همکاران [10] ارتعاش آزاد تیر همسانگرد با نیمرخ عرضی متغیر با تغییرات نمایی را مورد بررسی قرار دادند. ایشان معادله حاکم را به یک معادله دیفرانسیل معمولی بر حسب متغیرهای مکانی تقلیل دادند و پاسخ‌ها را برای شرایط تکیه‌گاهی مختلف ارائه دادند.

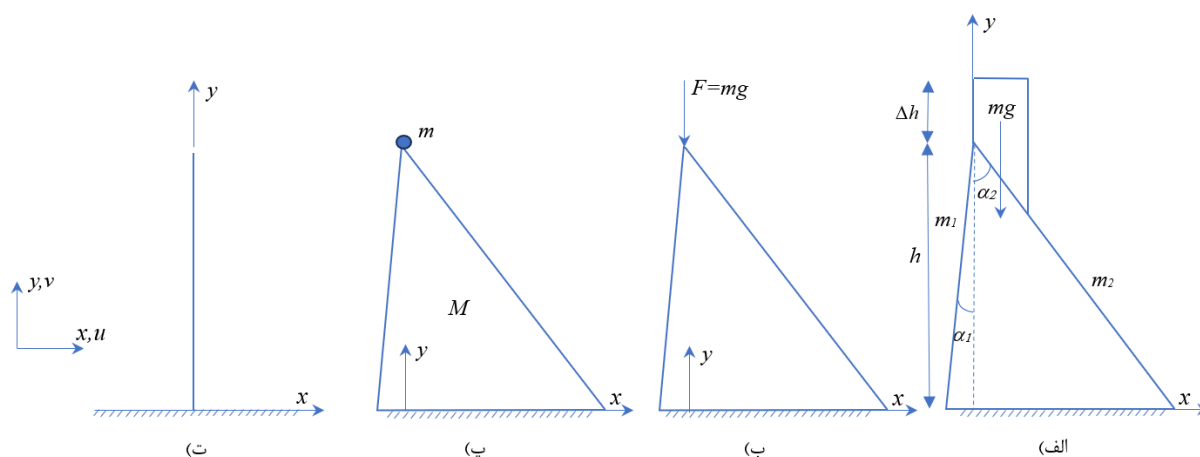
شهبا و همکاران (Shahba et al.) [11] ارتعاش آزاد و پایداری تیرهای مدرج تابعی را به روش تقریبی مورد بررسی قرار دادند. بانرجی و ویلیامز (Banerjee & Williams) [12]

روشی تقریبی مبتنی بر روش تبدیل دیفرانسیلی برای تیر-ستون-های غیر یکنواخت مدرج تابعی محوری که دامنه تغییرات نیمرخ عرضی آن‌ها در محدوده متداول بود ارائه کردند. آربت (Arbate) [13] معادله حرکت تیرها و میله‌های غیر یکنواخت را تحت شرایط خاصی به معادلات نظیر تیرهای یکنواخت تبدیل کرد که برای برخی تیرها قابل استفاده است و حل آن‌ها را تسهیل می‌کند. ایس و آیدودی [14] معادله دیفرانسیل پاره‌ای تیرهای همسانگرد با تغییرات نمایی مساحت را به معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل کردند تا امکان حل آن فراهم گردد. موی و همکاران (Mou et al.) [15] روشی تحلیلی برای ماتریس سختی دینامیکی تیرهای با نیمرخ غیر یکنواخت دل‌خواه ارائه کردند.

تحلیل ارتعاش آزاد سدهای بتنی به طور عمده به روش‌های عددی انجام گرفته است و روش‌های مبتنی بر پاسخ‌های تحلیلی، براساس اطلاعات مؤلف، بسیار کم است. پیچیدگی به طور نسبی هندسی سدها و نیز وجود مخزن و نیز بستر را می‌توان دلایل عمده در عدم امکان استفاده از روش‌های تحلیلی برشمرد. فنوس و چوپرا (Fenvese & Chopra) در کار خود به طور مبسوط روش تعیین بسامد ارتعاش آزاد سدهای بتنی وزنی را جهت به‌کارگیری در روش اجزای محدود در تحلیل اندرکنش سد و مخزن ارائه کردند [16]. ایشان بر این اساس رابطه تقریبی $\omega_1 = 0/0165 \frac{\sqrt{E}}{H}$ را برای برآورد بسامد زاویه‌ای ارتعاش آزاد سدهای بتنی اصطلاحاً استاندارد را پیشنهاد کردند که در آن E مدول الاستیسیته بتن سد و H ارتفاع سد است. ایشان سپس با اصلاحاتی اثر مخزن و بستر را به صورت تقریبی وارد کردند. میگوئل و بوانانی (Miquel & Bouaanani) [17] نیز بر اساس روابط تقریبی فنوس و چوپرا و نیز در نظر گرفتن بخشی از آب مخزن از رابطه تقریبی در تعیین ارتعاش آزاد سد و مخزن بدون اثر بستر استفاده کردند. استفاده از روش جرم افزوده نیز یکی از روش‌های تقریبی در نظر گرفتن اثر مخزن در تحلیل ارتعاش آزاد سد و مخزن است که برخی از مراجع از جمله میگوئل و بوانانی بر اساس آن با برآورد تقریبی از بسامد ارتعاش آزاد سد مخزن سعی در تحلیل دینامیکی مجموعه سد مخزن بستر و نیز تعیین فشارهای هیدرودینامیکی کردند. عطارنژاد و فرساد

نیز روشی تحلیلی برای تعیین بسامد سدهای بتنی وزنی با نیمرخ متغیر پله‌ای در حل معادله حاکم بر تیرهای اوپلر - برنولی ارائه کردند [18]. عطارنژاد و قربانی تنها-Attarnejad & Ghorbani (Tanha) [19] پاسخ معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه چهارم حاکم بر تیرها با نیمرخ متغیر را بر حسب توابع بسل توسعه دادند. روش گالرکین یکی از روش‌های مؤثر و کارا در حل معادلات دیفرانسیل می‌باشد که در حوزه‌های مختلف مهندسی کاربرد وسیعی پیدا کرده است. در این روش، پاسخ معادله دیفرانسیل به صورت تابعی قیاسی در نظر گرفته می‌شود. با جای‌گذاری تابع فرضی در معادله دیفرانسیل حاکم، مانده وزنی حاصل با ضرب توابع قیاسی و انتگرال‌گیری در محدوده طول سد کمینه می‌گردد. برای مسائل مربوط به تیرها، صفحات و پوسته‌ها یکی از بهترین توابع قیاسی، مود ارتعاشی سازه است. این روش به طور موفقیت‌آمیزی توسط مؤلف پژوهش حاضر و همکاران در تحلیل ارتعاش آزاد تیرراییلی با میرایی ویسکوالاستیک غیر محلی [20] و تحلیل ارتعاش آزاد ویسکوالاستیک تیرهای غیر یکنواخت با میرایی غیر محلی مصالح مدرج تابعی [21] به کار گرفته شده است.

در این پژوهش تحلیل ارتعاش آزاد جانبی و محوری سدهای بتنی وزنی بدون اثر مخزن به روش گالرکین ارائه می‌شود. با استفاده از شکل مود ارتعاش آزاد تیر طره یکنواخت به عنوان تابع فرضی، بسامد ارتعاش آزاد سدهای بتنی وزنی با نیمرخ متغیر و با تغییرات خطی در ارتفاع با تکیه بر نظریه‌های اوپلر - برنولی و راییلی تعیین می‌گردد. به منظور صحت‌سنجی، ابتدا در هر بخش روشی تحلیلی برای پاسخ ارتعاش جانبی و محوری سدهای بتنی وزنی با تغییرات خطی ضخامت ارائه گردیده است. مقایسه نتایج حاصل از روش گالرکین در این پژوهش با پاسخ تحلیلی حاکی از دقت بسیار خوب روش گالرکین است. در ادامه اثر جرم فوقانی سد به دو صورت نیرو و جرم متمرکز در رأس سد مثلی شکل و نیز تغییر در ضابطه تغییرات خطی نیمرخ سد با ضخامت ثابت جرم فوقانی مورد بررسی قرار می‌گیرد. رابطه‌سازی با احتساب اثر مخزن و بررسی نتایج اثر آن در پژوهشی مجزا توسط نویسنده ارائه خواهد شد.



شکل ۱ نیمرخ قائم سد بتنی وزنی، (الف) با جرم فوقانی، (ب) با نیروی وزن معادل جرم فوقانی، (پ) با جرم بخش فوقانی به صورت متمرکز، (ت) تیریک-سرگیردار و یکسر آزاد به همراه محورهای مختصات

(۳) و (۴) خواهد شد:

$$E(Iu'')'' - (Pu')' - \rho A \omega^2 u = 0 \quad (۳)$$

$$E(Iu'')'' + \rho \omega^2 (Iu')' - (Pu')' - \rho A \omega^2 u = 0 \quad (۴)$$

هر دو معادله دیفرانسیل فوق از مرتبه چهار و از نوع همگن خطی می‌باشد. برای حالتی که ممان اینرسی و مساحت متغیر باشد معادلات بالا با ضرایب متغیر نتیجه خواهد شد. معادله دیفرانسیل با ضرایب متغیر در غالب موارد حل به فرم بسته ندارند و در حالت کلی استفاده از روش‌های تقریبی در حل برخی از آن‌ها به دلیل پیچیدگی معادلات یا اقناع شرایط مرزی اجتناب-ناپذیر می‌شود. روش‌های متعددی برای تعیین بسامدهای ارتعاشی سازه‌ها و نیز شکل مود آن‌ها ارائه شده است که یکی از مطرح‌ترین آن‌ها روش رایلی - ریتز می‌باشد. روش رایلی - ریتز تنها برای سیستم‌های پایستار صادق است و مبتنی بر فرض تابع شکل مودی سازه می‌باشد. روش‌های باقی‌مانده وزنی که مبتنی بر بسط سری برای تابع جابه‌جایی در حالت کلی و شکل مود در تحلیل ارتعاشی می‌باشد از این برتری متمایز نسبت به روش رایلی - ریتز برخوردار است که برای سیستم‌های ناپایستار نیز قابل استفاده است. روش‌های باقی‌مانده وزنی بسیار شبیه به هم هستند که اهم آن‌ها شامل روش گالرکین، روش ترتیبی و روش کمترین مربعات می‌باشد. روش گالرکین که بعدها توسط پژوهشگران دیگری توسعه یافت، از جمله روش‌های مؤثر و کارا برای حل معادلات دیفرانسیل ارتعاش آزاد و حتی ارتعاش اجباری است.

معادلات حاکم بر ارتعاش جانبی

معادله حاکم بر ارتعاش جانبی تیرهای مبتنی بر نظریه‌های اوایلر - برنولی و رایلی به ترتیب همانند رابطه‌های (۱) و (۲) بیان می‌شود [1]:

$$(EI\ddot{u})'' + C\dot{u} - (P\ddot{u})' + \rho A\ddot{u} = q \quad (۱)$$

$$(EI\ddot{u})'' + C\dot{u} - (\rho I\ddot{u})' - (P\ddot{u})' + \rho A\ddot{u} = q \quad (۲)$$

در روابط بالا، علامت‌های پریم و نقطه بر روی پارامترها به ترتیب معرف مشتق‌های مکانی و زمانی، y مطابق شکل (۱) مختصه طولی تیر، t متغیر زمان، $\ddot{u}(y, t)$ جابه‌جایی جانبی در هر نقطه از تیر، $\rho(y)$ و $E(y)$ به ترتیب جرم واحد حجم و ضریب کشسانی مصالح تیر، $I(y)$ و $A(y)$ به ترتیب ممان اینرسی حول محور خشی و مساحت تیر، $C(y)$ ضریب میرایی یا استهلاك مصالح، $P(y)$ نیروی محوری در نیمرخ افقی تیر و $q(y, t)$ نیز شدت بار خارجی جانبی را نشان می‌دهد که برای تحلیل ارتعاش آزاد صفر در نظر گرفته می‌شود. با فرض همگن بودن مصالح تیر در این پژوهش، جرم حجمی، ضرایب کشسانی و برشی مصالح ثابت است و به دلیل تاثیر کم اثر استهلاك، از اثر آن بر بسامد ارتعاش آزاد تیر صرف نظر می‌شود.

با فرض هارمونیک بودن ارتعاش به صورت $\ddot{u}(y, t) = u(y)e^{i\omega t}$ که در آن u جابه‌جایی تیر بر حسب y ، $i = \sqrt{-1}$ و ω بسامد زاویه‌ای ارتعاش آزاد است و جای‌گذاری آن در روابط (۱) و (۲) معادلات حاکم بر ارتعاش آزاد تیرها در دامنه بسامد به ترتیب برای نظریه‌های اوایلر - برنولی و رایلی به مانند روابط

بازنویسی است:

$$\omega^2 \sum_{j=1}^N m_{jk} c_j + \sum_{j=1}^N k_{jk} c_k = 0, k = 1, 2, \dots, N \quad (10)$$

به این ترتیب شکل ماتریسی معادله حاکم بر ارتعاش تیر به صورت رابطه (۱۱) می‌باشد:

$$-\omega^2 [m] \vec{c} + [k] \vec{c} = 0 \quad (11)$$

معادله (۱۱) شکل استاندارد مسئله مقدار ویژه است و برای جواب غیر بدیهی باید دترمینان عبارت $\lambda^2 [m] + [k] = 0$ برابر صفر قرار گیرد. با استفاده از معادله مشخصه حاصل، ابتدا مقدارهای ویژه یا بسامدهای طبیعی، ω ، تعیین می‌شوند، سپس با کمک رابطه (۱۱) مقدارهای ویژه یا شکل مود ارتعاشی سد، بردار $\vec{c}$ ، به دست می‌آید. بردارهای ویژه به روش‌های به طور نسبی ساده ریاضی تعیین می‌گردد که از بیان جزئیات آن در این مقاله خودداری می‌گردد.

برای تعیین مقدارهای ویژه لازم است توابع قیاسی مناسبی برای رابطه (۵) انتخاب شوند. بدین منظور از شکل مود ارتعاش آزاد تیرهای یکنواخت استفاده می‌شود که شرایط مرزی مسئله را اقناع می‌کنند. مود ارتعاش تیر طره یکنواخت با حل معادله دیفرانسیل (۳) بدون احتساب نیروی محوری و اعمال شرایط مرزی $u(0) = u'(0) = 0$ ، شکل (۱)، رابطه (۱۲) را نتیجه می‌دهد [1]:

$$\phi_j(y) = \cos(\beta_j y) - \cosh(\beta_j y) - A_0(\sin(\beta_j y) - \sinh(\beta_j y)) \quad (12)$$

که در آن A_0 از رابطه (۱۳) تعیین می‌گردد:

$$A_0 = (\cos(\beta_j h) + \cosh(\beta_j h)) / (\sin(\beta_j h) + \sinh(\beta_j h)) \quad (13)$$

برای تعیین β_j نیز می‌توان از دو شرط مرزی $u''(h) = 0$ استفاده کرد. از برابر صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه معادلات به دست آمده، معادله بسامدی (۱۴) حاصل می‌شود:

$$\cos(\beta_j h) \cdot \cosh(\beta_j h) + 1 = 0 \quad (14)$$

با حل معادله (۱۴) مقدار $\beta_j h$ تعیین می‌گردد و به کمک آن شکل مود ارتعاشی در رابطه (۱۲) تعیین می‌گردد. بر این اساس ده ریشه اول یا ده مود اول نوسان تعیین گردیده و در جدول (۱) ارائه شده است.

روش گالرکین

در روش گالرکین جواب یک معادله دیفرانسیل به مانند رابطه (۵) فرض می‌شود:

$$u = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j(y) \quad (5)$$

که در آن c_j ضرایب ثابت و $\phi_j(y)$ توابع قیاسی را نشان می‌دهند. این توابع طوری انتخاب می‌شوند که شرایط مرزی را اقناع کنند ولی لزوماً در معادله دیفرانسیل حاکم صدق نخواهد کرد. در روش گالرکین چنانچه اختلاف یا مانده پاسخ دقیق معادله دیفرانسیل حاکم از تابع قیاسی رابطه (۵) با R نشان داده شود، در این صورت مطابق روش گالرکین رابطه (۶) باید برقرار باشد:

$$\int_0^h R \phi_k(y) dy = 0 \quad (6)$$

که در مسئله ارتعاش تیرها h طول تیر و در این تحقیق ارتفاع سد را نشان می‌دهد. در حل مسائل ارتعاش آزاد، استفاده از رابطه اخیر منجر به مسئله مقادیر ویژه و بردارهای ویژه می‌گردد که در آن ω_j بسامدهای ارتعاش آزاد یا مقدارهای ویژه و c_j مودهای ارتعاشی سازه یا بردارهای ویژه هستند.

تیر اویلر - برنولی

برای معادله تیر مبتنی بر نظریه اویلر - برنولی با استفاده از تابع قیاسی و رابطه (۵) و جای‌گذاری آن در معادله دیفرانسیل (۳) و بدون اثر نیروی محوری، تابع باقی‌مانده از رابطه (۷) تعیین می‌شود:

$$R = -\omega^2 \rho A \sum_{j=1}^N c_j \phi_j + E \sum_{j=1}^N c_j [I \phi_j''] \quad (7)$$

برای صفر شدن مانده وزنی اخیر با بهره‌گیری از رابطه (۶) رابطه (۸) نتیجه خواهد شد:

$$\sum_{j=1}^n c_j (-\omega^2 \rho \int_0^h A \phi_j \phi_k dy + E \int_0^h [I \phi_j''] \phi_k) = 0 \quad (8)$$

بنابراین ضرایب ماتریس سختی k_{jk} و جرم m_{jk} به شکل رابطه (۹) به دست می‌آید:

$$k_{jk} = E \int_0^h (I \phi_j'') \phi_k dy, m_{jk} = \rho \int_0^h A \phi_j \phi_k dy \quad (9)$$

با توجه به رابطه (۹) رابطه (۸) به شکل رابطه (۱۰) قابل

جدول ۱ ریشه‌های معادله بسامدی تیر یک سرگیردار و یک سر آزاد در ارتعاش جانبی به ازای مقادیرهای متفاوت R_m

$\beta_{10}h$	β_9h	β_8h	β_7h	β_6h	β_5h	β_4h	β_3h	β_2h	β_1h	R_m
۲۹/۸۴۵۱	۲۶/۷۰۳۵	۲۳/۵۶۲۰	۲۰/۴۲۰۴	۱۷/۲۷۸۸	۱۴/۱۳۷۲	۱۰/۹۹۵۶	۷/۸۵۴۷	۴/۶۹۴۱	۱/۸۷۵۱	۰/۰۰
۲۹/۶۲۰۵	۲۶/۴۹۷۱	۲۳/۳۷۴۰	۲۰/۲۵۳۵	۱۷/۱۳۳۵	۱۴/۰۱۴۹	۱۰/۸۹۷۶	۷/۷۸۲۷	۴/۶۴۹۷	۱/۸۵۶۸	۰/۰۱
۲۹/۴۹۰۰	۲۶/۳۷۱۱	۲۳/۲۵۴۶	۲۰/۱۴۰۷	۱۷/۰۳۰۰	۱۳/۹۲۲۷	۱۰/۸۱۹۵	۷/۷۲۱۸	۴/۶۱۰۰	۱/۸۳۹۳	۰/۰۲
۲۹/۴۰۶۸	۲۶/۲۸۸۳	۲۳/۱۷۲۸	۲۰/۰۶۱۰	۱۶/۹۵۳۶	۱۳/۸۵۱۶	۱۰/۷۵۶۳	۷/۶۶۹۸	۴/۵۷۴۳	۱/۸۲۲۶	۰/۰۳

اثر وزن جرم فوقانی و بدنه سد

چنانچه در رابطه (۳) اثر نیروی محوری یا وزن سازه، که در سدهای بتنی قابل توجه است و عامل پایداری سد محسوب می‌شود، نیز در نظر گرفته شود در این صورت اثر جمله (Pu') که در آن نیروی فشاری با علامت منفی در روابط تعریف شده است نیز باید در نظر گرفته شود. در تحلیل سدهای بتنی وزنی متعارف اثر وزن را، مطابق شکل (۱) به دو شکل اثر وزن جرم فوقانی به صورت نیروی متمرکز $P_0 = mg$ در رأس مثلث یا تاج بخش مثلثی و نیز وزن بخش مثلثی که به صورت P_1 تعریف می‌گردد می‌توان در نظر گرفت که در آن m جرم فوقانی است. در این صورت با توجه به فشاری بودن این نیروها، مجموع اثر وزن جرم فوقانی و وزن بدنه سد به صورت $P(y) = -P_0 - P_1(y)$ قابل بیان است و در این صورت رابطه (۱۰) با احتساب نیروی محوری به مانند رابطه (۱۸) درمی‌آید:

$$-\omega^2 [m]\ddot{c} + [k + k_{p_0}]\ddot{c} = 0 \quad (18)$$

که در آن k_{p_0} ماتریس متناظر با نیروی محوری $P(y)$ است و شکل ضعیف آن مطابق رابطه (۱۹) بیان می‌شود:

$$k_{p_0} = \int_0^h P(y) \phi_j' \phi_k' dy - P(h) \phi_j'(h) \phi_k(h) \quad (19)$$

اثر جرم فوقانی به صورت جرم متمرکز

چنانچه اثر جرم فوقانی در تاج سد مطابق شکل (۱) به صورت جرم متمرکز m در نظر گرفته شود، با صرف نظر از اثر اینرسی با توجه به ابعاد بدنه سد، شرط مرزی نیروی برشی در لبه $y = h$ متفاوت با $\phi'''(h) = 0$ خواهد بود. این شرط مرزی برای تیر با نیمرخ ثابت به صورت رابطه (۲۰) بیان می‌شود:

$$\begin{cases} E I u'''(h, t) \\ E I u'''(h) = -m \omega^2 u(h) \end{cases} \quad (20)$$

در حالت کلی، توابع وزنی باید به گونه‌ای در نظر گرفته شوند که انتگرال مانده وزنی به واسطه آن‌ها نامتناهی نشود. علاوه بر این محدودیت‌هایی که در انتخاب نوع تابع وجود دارد، وابسته به مرتبه مشتق معادلات حاکم است. اگر معادلات حاکم و یا شرایط مرزی، از مشتق مرتبه m باشد، تابع وزنی باید طوری انتخاب می‌شود که مشتق مرتبه $m - 1$ آن در بازه انتگرال‌گیری پیوسته بماند. به این منظور به طور معمول با انتگرال‌گیری جزء به جزء، می‌توان مرتبه عملگر مشتق را کاهش داد. در نتیجه، پیوستگی مرتبه پایین‌تری برای تابع وزنی نیاز خواهد بود. به چنین حالتی شکل ضعیف معادله می‌گویند که از نظر فیزیکی نیز بهتر می‌توان آن را درک کرد. رابطه (۱۵) انتگرال‌گیری جزء به جزء در حالت یک بعدی را برای دو تابع دل‌خواه ϕ و φ نشان می‌دهد:

$$\int_0^h \phi d\varphi = - \int_0^h \varphi d\phi + [\phi \varphi]_0^h \quad (15)$$

با توجه به انتگرال رابطه سختی در رابطه (۹)، شکل ضعیف آن به کمک رابطه (۱۵) به صورت رابطه (۱۶) بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} k_{jk} &= -E \int_0^h (I \phi_j'')' \phi_k' dy + \\ &E(I(h) \phi_j''(h))' \phi_k'(h) - E(I(0) \phi_j''(0))' \phi_k'(0) \end{aligned} \quad (16)$$

با توجه به شرایط مرزی تیر مورد بررسی، مقادیر تابع ϕ در مرزها به صورت $\phi(0) = \phi'(0) = \phi''(h) = \phi'''(h) = 0$ می‌باشد. استفاده مجدد انتگرال‌گیری جزء به جزء برای رابطه (۱۶) و اعمال شرایط مرزی مربوط، درایه‌های ماتریس سختی به صورت رابطه (۱۷) بیان می‌شود:

$$k_{jk} = +E \int_0^h I \phi_{1j}'' \phi_k'' dy \quad (17)$$

$$-\omega^2[m - m_\theta - m_1]\vec{c} + [k + k_{p_0}]\vec{c} = 0 \quad (22)$$

که در آن m_θ جرم دورانی و m_1 نیز جمله حاصل از تبدیل روابط به فرم ضعیف و مربوط به انتگرال گیری جزء به جزء در اعمال شرایط مرزی در لبه های تیر می باشد که همانند رابطه (۲۳) می باشند.

$$m_{\theta jk} = \rho \int_0^h I \phi_j' \phi_k' dy, \\ m_{1jk} = \rho I(h) \phi_j'(h) \phi_k'(h) \quad (23)$$

در تحلیل ارتعاش آزاد بر اساس نظریه رابلی، از همان تابع قیاسی نظریه اویلر - برنولی می توان برای تعیین ماتریس ها در روابط (۲۲) و (۲۳) بهره گرفت. همچنین در این حالت برای در نظر گرفتن اثر جرم فوقانی به صورت جرم متمرکز، نیروی معادل وزن و یا تعریف هندسه جرم فوقانی با مساحت و ممان اینرسی متفاوت به مانند روش بیان شده برای تیر اویلر - برنولی می توان عمل کرد.

معادلات حاکم بر ارتعاش محوری

در ساده ترین نظریه ارتعاش محوری تیرها، سطح جانبی تیر در حین ارتعاش محوری ثابت باقی مانده و به جز تغییر شکل های محوری سایر مؤلفه های تغییر شکل را می توان انکار کرد. چنین نظریه ساده ای در ارتعاش محوری را می توان نظیر نظریه اویلر - برنولی در خمش دانست که در این پژوهش تحت عنوان نظریه «نظیر اویلر - برنولی» از آن یاد خواهد شد. در نظریه رابلی در ارتعاش محوری اثر اینرسی ناشی از حرکت جانبی مقاطع لحاظ می گردد در حالی که سختی برشی همچنان در نظر گرفته نمی شود.

بر اساس آنچه بیان شد، معادلات دیفرانسیل دو نظریه فوق در تحلیل ارتعاش آزاد محوری را می توان همانند روابط (۲۴) و (۲۵) بیان کرد [1]:

$$(EA v^{IV}) = 0 \quad (24)$$

$$(EA v^{IV}) = 0 \quad (25)$$

که در آن ها $\bar{v} = \bar{v}(y, t)$ مطابق شکل (۱) جابه جایی محوری، v ضریب پواسون و I ممان قطبی نیمرخ افقی است. با فرض حرکت هارمونیک با بسامد ω در ارتعاش محوری به صورت $\bar{v}(y, t) = v(y) e^{i\omega t}$ و جای گذاری آن در روابط (۲۴) و (۲۵) می توان معادلات فوق را از دامنه زمان به دامنه بسامدی منتقل کرد که برای مصالح همگن در روابط (۲۶) و (۲۷) ارائه

دیگر شرط مرزی در رأس سد به صورت $\phi''(h) = 0$ می شود، در این حالت معادله بسامدی رابطه (۲۱) برقرار است.

$$1 + 1/(\cos(\beta_j h) \cosh(\beta_j h)) - R_m(\beta_j h)(\operatorname{tg}(\beta_j h) - \operatorname{tgh}(\beta_j h)) = 0 \quad (21)$$

که در آن $R_m = m/M$ است و $M = \rho(m_1 + m_2)h^2/2$ جرم بخش مثلثی سد بدون احتساب جرم فوقانی است. ریشه های معادله بسامدی (۲۱) به نسبت R_m بستگی دارد و با توجه به کوچک بودن این نسبت در سدهای بتنی، سه مقدار مختلف 0/03, 0/02, 0/01 در این پژوهش مد نظر قرار می گیرد. لازم به ذکر است که معادله بسامدی (۱۴) حالت خاصی از معادله (۲۱) با $R_m = 0$ است. برای محاسبات مورد نیاز در این پژوهش، ده ریشه اول معادله های بسامدی (۲۱) تعیین شده و در جدول (۱) ارائه گردیده است.

لازم به ذکر است در حالتی که جرم فوقانی به صورت یک جرم متمرکز در نظر گرفته شود، کلیه روابط پیشتر ارائه شده مربوط به روش گالرکین برقرار است.

از دیدگاه نظری مناسب تر است جرم متمرکز m به مرکز جرم یا همان مرکز سطح جرم فوقانی منتقل شود تا از اثر انتقال لنگر ناشی از آن که باعث مشکلاتی در اقناع شرط مرزی لنگر در $y = h$ می شود، اجتناب شود. اما در ادامه نشان داده خواهد شد تأثیر m بر بسامد سد بسیار ناچیز است و لذا می توان از لنگر ناشی از آن صرف نظر کرد.

اثر جرم فوقانی با تغییر مشخصات هندسی

برای احتساب اثر جرم فوقانی، علاوه بر در نظر گرفتن آن به صورت جرم و یا نیروی متمرکز، می توان اثر آن را به صورت تغییر در هندسه سد در نظر گرفت. بدین منظور بازه انتگرال گیری در رابطه (۶) به تعداد تغییر ضابطه مساحت و ممان اینرسی در ارتفاع سد تغییر می یابد که به عنوان مثال برای شکل (۱) به دو بازه از صفر تا $h - \Delta h$ با تغییرات خطی مساحت و ممان اینرسی و از $h - \Delta h$ تا h با مساحت و ممان اینرسی ثابت در بخش جرم فوقانی استفاده کرد.

تیر رابلی

با روندی مشابه به تیر اویلر - برنولی، شکل ضعیف رابطه گالرکین برای تیر رابلی با احتساب نیروی محوری به صورت رابطه (۲۲) به دست می آید.

شده است:

$$E(Av')' + \rho \omega^2 Av = 0 \quad (26)$$

$$E(Av')' - \rho \omega^2 v^2 (Jv')' + \rho \omega^2 Av = 0 \quad (27)$$

تیر نظیر اوپلر - برنولی

در این حالت با استفاده از تابع قیاسی Φ_{aj} در رابطه (۵) و جای-گذاری آن در معادله دیفرانسیل (۲۶) باقی مانده وزنی از رابطه (۲۸) تعیین می شود:

$$R = \omega^2 \rho A \sum_{j=1}^N c_{aj} \Phi_{aj} + E \sum_{j=1}^N c_{aj} [A \Phi'_{aj}]' \quad (28)$$

که در آن c_{aj} ، به مانند c_j در ارتعاش جانبی، ضرایب ثابت برای ارتعاش محوری می باشند. با قرار دادن رابطه (۲۸) در معادله (۶) و ضرب آن در توابع وزنی، رابطه (۲۹) نتیجه می شود:

$$\sum_{j=1}^N c_{aj} (\omega^2 \rho \int_0^h A \Phi_{aj} \Phi_{ak} dy - E \int_0^h [A \Phi'_{aj}]' \Phi_{ak} dy) = 0 \quad (29)$$

چنانچه ضرایب سختی k_{aij} و جرم m_{aij} به فرم ضعیف به مانند روابط (۳۰) مرتب گردند، در این صورت رابطه (۲۹) را می توان به شکل رابطه (۳۱) بیان کرد:

$$k_{aij} = E \int_0^h A \Phi'_{aj} \Phi'_{ak} dy, m_{aij} = \rho \int_0^h A \Phi_{aj} \Phi_{ak} dy \quad (30)$$

$$\omega^2 \sum_{j=1}^N m_{ajk} c_j - \sum_{j=1}^N k_{ajk} c_j = 0 \quad (31)$$

که به شکل ماتریسی همانند رابطه (۳۲) بازنویسی می شود:

$$[\omega^2 m_a - k_a] \vec{c} = 0 \quad (32)$$

برای جواب غیر بدیهی لازم است دترمینان ضرایب دستگاه معادلات (۳۲) برابر صفر قرار گیرد تا مقادیر ویژه تعیین - گردند.

مود ارتعاش محوری تیر همگن یکنواخت یک سر گیردار و یک سر آزاد با حل معادله دیفرانسیل (۲۶) و اعمال شرایط مرزی به صورت $\Phi_{aj}(0) = \Phi'_{aj}(h) = 0$ مطابق رابطه (۳۳) خواهد بود:

$$\Phi_{aj}(y) = \sin\left(\frac{2j-1}{2h} \pi y\right) \quad (33)$$

که در آن j عدد صحیح و از یک شروع خواهد شد.

نظریه رابلی

با روندی مشابه تیر نظیر اوپلر - برنولی و استفاده از معادله دیفرانسیل (۲۷)، معادله مشخصه تیر رابلی در ارتعاش محوری به صورت رابطه (۳۴) خواهد بود:

$$[\omega^2 (m_a + m_{a0}) - k_a] \vec{c} = 0 \quad (34)$$

که در آن شکل ضعیف m_{a0} از رابطه (۳۵) تعیین می گردد:

$$m_{a0jk} = \rho v^2 \int_0^h J \Phi'_{aj} \Phi'_{ak} dy \quad (35)$$

اثر جرم فوقانی

در تحلیل ارتعاش آزاد محوری سدهای بتنی وزنی، در نظر گرفتن اثر جرم فوقانی به صورت نیروی متمرکز منجر به تحلیل ارتعاش اجباری می گردد که خارج از موضوع تحقیق حاضر است. بنابراین اثر جرم فوقانی در این بخش فقط به صورت جرم متمرکز m و اعمال شرایط مرزی در تاج سد (شکل ۱) در نظر گرفته می شود. در این حالت شرایط مرزی در لبه $y = h$ متفاوت با آنچه پیشتر برای ارتعاش جانبی ارائه شد، خواهد بود. در اثر ارتعاش محوری سد، وجود جرم متمرکز m در تاج سد منجر به ایجاد نیروی $-m\ddot{v}_{(h,t)}$ می گردد. به این ترتیب شرایط مرزی برای تیر با مقطع ثابت به صورت رابطه (۳۶) بیان می شود:

$$\begin{cases} E\ddot{v}'_{(h,t)} = -m\ddot{v}_{(h,t)} \\ v(0) = 0 \end{cases} \quad (36)$$

با توجه به شکل مود ارتعاشی انتخابی به مانند رابطه (۳۳) و رابطه اول (۳۶)، معادله بسامدی تیر با مقطع یکنواخت مطابق رابطه (۳۷) نتیجه می شود:

$$(\beta_j h) R_m \sin(\beta_j h) = \cos(\beta_j h) \quad (37)$$

به مانند ارتعاش جانبی، در حالت ارتعاش محوری نیز سه مقدار مختلف R_m معادل 0/03, 0/02, 0/01 مورد توجه قرار گرفته و بر اساس آن ریشه های معادله بسامدی (۳۷) تعیین و در جدول (۲) ارائه گردیده است.

جدول ۲ ریشه‌های معادله بسامدی تیر یک سر گیردار و یک سر آزاد در ارتعاش محوری به ازای مقادیرهای متفاوت R_m

$\beta_{10}h$	β_9h	β_8h	β_7h	β_6h	β_5h	β_4h	β_3h	β_2h	β_1h	R_m
29/8451	26/7035	23/5619	20/4204	17/2788	14/1372	10/9956	7/8540	4/7124	1/5708	0/00
29/5577	26/4450	23/3327	20/2208	17/1093	13/9981	10/8871	7/7764	4/6657	1/5552	0/01
29/3149	26/2206	23/1287	20/0392	16/9519	13/8666	10/7832	7/7010	4/6203	1/5400	0/02
29/1270	26/0404	22/9588	19/8825	16/8117	13/7460	10/6854	7/6290	4/5760	1/5251	0/03

برای نیمرخ‌های متغیر، از آنجایی که ممان اینرسی و سطح مقطع در ارتفاع تغییر می‌کند، هر چه تعداد موده‌های انتخابی بیشتر باشد نتایج دقیق‌تر خواهد بود. به منظور دسترسی به یک شاخص مناسب در خصوص انتخاب تعداد مودها، N ، نتایج محاسبات برای بسامد زاویه‌ای یک سد بتنی وزنی مثلثی شکل فرضی با مشخصات هندسی $m_1 = 0, m_2 = 0/75, h = 100$ مطابق شکل (۱)، و نیز مشخصات فیزیکی و مکانیکی مصالح سد $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3, E = 22/4 \text{ MPa}$ سطح مقطع و ممان اینرسی سد نیز مطابق شکل (۱) با فرض تغییرات خطی ضخامت از رابطه (۳۸) تعیین گردید که در آن $\bar{m} = m_1 + m_2$ است و طول سد برابر واحد در نظر گرفته شده است:

$$\begin{cases} A(y) = (\bar{m})(h - y) \\ I(y) = \bar{m}^3 (h - y)^3 / 12 \end{cases} \quad (38)$$

نتایج به دست آمده برای بسامد زاویه‌ای سد مورد بررسی، مبتنی بر نظریه اویلر - برنولی در حالت کلی ضریبی از $\frac{\bar{m}}{h} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ است که به دلیل طولانی بودن روابط، نتایج به صورت مقادیر عددی ارائه می‌شوند. در جدول (۳) بسامدهای زاویه‌ای سد در ۸ مود مختلف بر اساس دو نظریه اویلر - برنولی ω_{jE} و رایلی ω_{jR} و نسبت آن‌ها $\alpha_j = \omega_{jE} / \omega_{jR}$ ارائه شده است. همان طور که از جدول یاد شده قابل ملاحظه است، بسامدهای طبیعی در موده‌های بالاتر به ازای یک N مشخص دقت کمتری دارند و با افزایش N اصلاح می‌گردد. از آنجایی که در این تحقیق ۵ مود اول مورد بررسی قرار می‌گیرد، تعداد موده‌های انتخابی $N = 8$ اختیار می‌گردد. در این صورت و مطابق جدول (۳) بیشترین درصد خطای ناشی از محاسبه بالاترین بسامد از رابطه $\varepsilon = \frac{\omega_j - \omega_{j+1}}{\omega_j}$ که در آن j بسامد زاویه‌ای j ام در بین N مود می‌باشد به کمتر از هشت درصد می‌رسد.

در حالتی که جرم m در لبه آزاد تیر قرار دارد، کلیه روابط پیشین مربوط به روش گالرکین برای ارتعاش محوری نیز صادق است و از اثر لنگر ناشی از انتقال جرم صرف نظر می‌شود. به مانند ارتعاش جانبی، در ارتعاش محوری نیز اثر جرم فوقانی را می‌توان با تعریف مساحت و ممان اینرسی متفاوت با بخش مثلثی سد در بازه‌های متفاوت انتگرال‌گیری‌ها در نظر گرفت.

بحث و نتیجه‌گیری

به منظور تعیین بسامد زاویه‌ای سد بتنی مثلثی شکل بر اساس روش گالرکین و نظریه‌های اویلر - برنولی و رایلی با کمک برنامه کامپیوتری در محیط متلب (Matlab) بسامدهای ارتعاش جانبی و محوری تعیین گردیدند. به منظور صحت‌سنجی، نتایج حاصل از این پژوهش برای ارتعاش جانبی و محوری ابتدا برای تیر یکنواخت و سپس برای سدهای بتنی به ترتیب با نتایج حاصل از روش تحلیلی مقایسه گردیدند که در ادامه به آن پرداخته خواهد شد.

نتایج عددی

ارتعاش جانبی

به منظور تعیین تعداد موده‌های مورد نیاز، N ، در محاسبه مقادیرهای ویژه در حالت‌های مختلف، ابتدا برای حالت خاص (تیر یکنواخت)، نتایج محاسبه و با نتایج تحلیل دقیق در مراجع مختلف از جمله [1] مقایسه گردید. نتایج به دست آمده برای بسامدهای زاویه‌ای تحقیق حاضر نشان می‌دهد که هر تعداد مود انتخابی N با دقت بسیار خوبی، حداقل تا سه رقم اعشار بسته به حالت مورد مقایسه، با نتایج تحلیل دقیق تطابق کامل دارند.

جدول ۳ بسامد طبیعی ارتعاش جانبی حاصل از نظریه اوپلر - برنولی و رابلی و نسبت آن‌ها، ω_{jE}/ω_{jR} بر حسب rad/s

N	j						
	1	2	6	5	4	3	7
۱	$\frac{39/42}{37/53}$ $= 1/05$	-	-	-	-	-	-
۲	$\frac{35/22}{33/68}$ $= 1/05$	$\frac{140/62}{120/05}$ $= 1/17$	-	-	-	-	-
۳	$\frac{34/66}{33/21}$ $= 1/04$	$\frac{109/70}{96/82}$ $= 1/13$	$\frac{324/08}{228/84}$ $= 1/42$	-	-	-	-
۴	$\frac{34/54}{33/11}$ $= 1/04$	$\frac{103/99}{93/27}$ $= 1/11$	$\frac{243/93}{185/60}$ $= 1/31$	$\frac{597/91}{340/90}$ $= 1/75$	-	-	-
۵	$\frac{34/49}{33/07}$ $= 1/04$	$\frac{101/33}{91/44}$ $= 1/11$	$\frac{223/72}{177/47}$ $= 1/26$	$\frac{449/49}{284/95}$ $= 1/58$	$\frac{966/38}{450/26}$ $= 2/14$	-	-
۶	$\frac{34/47}{33/05}$ $= 1/04$	$\frac{100/20}{90/73}$ $= 1/10$	$\frac{212/29}{171/71}$ $= 1/24$	$\frac{405/62}{274/23}$ $= 1/48$	$\frac{732/29}{386/45}$ $= 1/89$	$\frac{1432/47}{556/75}$ $= 2/57$	-
۷	$\frac{34/46}{33/04}$ $= 1/04$	$\frac{99/55}{90/30}$ $= 1/10$	$\frac{206/54}{169/20}$ $= 1/22$	$\frac{478/67}{264/69}$ $= 1/81$	$\frac{656/11}{374/86}$ $= 1/75$	$\frac{1096/23}{487/63}$ $= 2/25$	$\frac{1998/50}{661/07}$ $= 3/02$
۸	$\frac{34/45}{33/04}$ $= 1/04$	$\frac{99/21}{90/09}$ $= 1/10$	$\frac{202/75}{167/35}$ $= 1/21$	$\frac{363/70}{260/38}$ $= 1/40$	$\frac{607/35}{362/57}$ $= 1/68$	$\frac{979/06}{475/99}$ $= 2/06$	$\frac{1544/45}{588/01}$ $= 2/63$
رابطه (۴۰)	34/45	98/55	194/55	322/50	482/42	673/97	898/00

علاوه بر این در جدول (۳) نسبت بسامدهای لازم بر اساس نظریه اوپلر - برنولی به نظریه رابلی همواره بزرگتر از یک می باشد. این مسئله گویای آن است که بسامد مود تیر اوپلر - برنولی همواره از بسامد نظیر تیر رابلی بیشتر است. علت چنین وضعیتی را می توان به سختی بیشتر تیر اوپلر برنولی نسبت داد. این اختلاف در مودهای پایین تر کمتر و برای مود اول حدود 1/04 برابر است، ولی برای مودهای بالاتر این نسبت افزایش می یابد و برای مود هشتم به نزدیک 3/5 برابر نیز می رسد. این موضوع گویای آن است که در مودهای پایین تر شاید بتوان از خطای ناشی از انکار اثر اینرسی دورانی چشم پوشی کرد، ولی در مودهای بالاتر نظریه اوپلر - برنولی خطای قابل توجهی دارد و لازم است از نظریه رابلی استفاده شود. علاوه بر این، نتایج ارائه شده در جدول (۳) به طور مشخصی گویای آن است که مقدار بسامدها در دو نظریه یا نسبت آن‌ها با افزایش تعداد مودهای محاسباتی، N، به مقدار ثابتی میل می کند که گویای بسندگی تعداد

مودهای مورد نیاز در محاسبه بسامد است.

پاسخ تحلیلی

معادله دیفرانسیل حاکم بر ارتعاش جانبی تیرهای اوپلر - برنولی (رابطه ۳) بدون اثر نیروی محوری، برای هندسه منطبق بر سدهای بتنی وزنی مطابق شکل (۱) و روابط (۳۸) به مانند معادله (۳۹) قابل بیان است:

$$(h-y)^4 u^{(4)} + 6(h-y)^3 u^{(3)} + 6(h-y)^2 u^{(2)} - \frac{12\rho\omega^2}{E\bar{m}^2} (h-y)^2 u = 0 \quad (39)$$

معادله دیفرانسیل (۳۹) از نوع همگن مرتبه ۴ با ضرایب متغیر و از نوع بسل است و با معرفی $a^4 = \frac{12\rho\omega^2}{E\bar{m}^2}$ داری پاسخ تحلیلی به شکل معادله (۴۰) می باشد:

$$u(y) = \frac{1}{\sqrt{h-y}} (c_1 I_1(2a\sqrt{h-y}) + c_2 Y_1(2a\sqrt{h-y}) + c_3 I_1(2a\sqrt{h-y}) + c_4 K_1(2a\sqrt{h-y}))$$

(۴۰)

اشاره شده نیز برقرار است که به دلیل محدودیت حجم مقاله از ارائه نتایج عددی در این خصوص خودداری می‌شود. اختلاف ناچیز موجود در جدول (۴) در خصوص نسبت بسامد سد در دو ارتفاع مختلف به حسب نسبت دو ارتفاع متفاوت را می‌توان به متغیر بودن نیمرخ قائم سد و محدودیت تعداد جملات N در پاسخ آزمایشی نسبت داد.

نسبت بسامدها در نظریه اوایلر - برنولی به رابلی در جدول (۳) در بازه حدود $1/05$ برای مود اول تا $3/5$ برابر در مود هشتم و در جدول (۴) نیز در دامنه یکسان تغییر می‌کند. برای بررسی بیشتر این موضوع و به عنوان نمونه، در جدول (۵) نتایج برای سدی به ارتفاع $h = 100m$ و شیب‌های بالادست و پایین-دست $m_1 = 0, m_2 = 0/01$ که یک نمونه کاملاً فرضی و در عمل غیر منطقی هست ارائه شده است که با نتایج نظیر در جدول‌های (۳) و (۴) به ازای $m_1 = 0, m_2 = 0/75$ قابل مقایسه است. از جدول (۵) کاملاً پیداست که اختلاف نتایج نظریه اوایلر - برنولی و رابلی حتی در بسامدهای بالاتر بسیار ناچیز و قابل چشم‌پوشی است. علت این موضوع را می‌توان به نسبت عرض کف به ارتفاع سد که در تیرهای همگن معادل نسبت ارتفاع تیر به طول تیر می‌باشد مرتبط دانست. در تیرهای عمیق این نسبت تأثیر عمده‌ای در رفتار برشی و نیز اینرسی دورانی تیر ایفا می‌کند که در سدهای بتنی وزنی با هندسه غیر یکنواخت در ارتفاع نیز مشهود است.

که در آن K_1, I_1, Y_1, J_1 به ترتیب توابع بسل نوع ۱، ۲ و اصلاح شده نوع ۱ و ۲ همگی از مرتبه ۱ هستند. ضرایب c_1 الی c_4 ضرایب ثابت هستند که با اعمال شرایط مرزی به ترتیب نیروی برشی و لنگر خمشی در رأس سد و $u' = u = 0$ در کف سد، معادله بسامدی تعیین و با حل آن بسامد زاویه ارتعاش جانبی به دست می‌آید. به منظور صحت‌سنجی، نتایج به دست آمده از روش گالرکین مورد استفاده در این پژوهش بر اساس نظریه اوایلر - برنولی با نتایج تحلیلی حاصل از رابطه (۴۰) در جدول (۳) مقایسه گردیدند. نتایج گویای آن است که در مود اول انطباق کامل بین روش تحلیلی و روش گالرکین وجود دارد. اما به تدریج و با افزایش شماره مود اختلاف افزایش و در مودهای بالا اختلاف پاسخ‌ها قابل توجه است که علت آن را می‌توان عدم دقت ناشی از بسامد زاویه‌ای حاصل از روش گالرکین دانست که در آن مودهای بالاتر به ازای N بیشتر باید محاسبه گردند.

در جدول (۴) نیز مقادیر ۵ بسامد طبیعی به ازای $N = 8$ برای چهار ارتفاع مختلف سد برای شیب $m_1 = 0, m_2 = 0/75$ ارائه شده است. مقایسه نتایج این جدول نشان می‌دهد که بسامد طبیعی سد به نسبت عکس ارتفاع سد می‌باشد که وابستگی بسامد طبیعی را به رابطه $\frac{m}{h} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ در نظریه اوایلر - برنولی تأیید می‌کند. این موضوع علاوه بر ارتفاع سد برای سایر پارامترهای عبارت

جدول ۴ بسامد طبیعی ارتعاش جانبی سد بر اساس نظریه‌های اوایلر - برنولی و رابلی برای چهار ارتفاع مختلف، rad/s

نظریه	ارتفاع سد، m	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
اوایلر - برنولی	۵۰	68/91	198/43	405/50	727/40	1214/71
	۱۰۰	34/45	99/21	202/75	363/70	607/35
	۱۵۰	22/97	66/14	135/17	242/47	404/94
	۲۰۰	17/23	49/61	101/38	181/86	303/70
رابلی	۵۰	66/07	180/19	334/71	520/75	725/15
	۱۰۰	33/04	90/09	167/35	260/38	362/58
	۱۵۰	22/02	60/06	111/57	173/59	241/72
	۲۰۰	16/52	45/05	83/68	130/19	181/30

جدول ۵ بسامد طبیعی سد مبتنی بر نظریه‌های اوایلر - برنولی و رابلی به ازای $m_1 = 0, m_2 = 0/01$ بر حسب $\frac{rad}{s}$

نظریه	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8
اوایلر برنولی	0/46	1/33	2/70	4/85	8/10	13/10	20/59	35/55
رابلی	0/46	1/32	2/70	4/85	8/10	13/10	20/58	35/51

می‌شود که تأثیر آن در مودهای بالاتر بیشتر است. نتایج ارائه شده در جدول (۶) همچنین گویای آن است که اثر مدل کردن جرم فوقانی به صورت جرم بر رأس سد مثلی هر چند اندک اما کمی بیشتر از اثر آن به صورت نیروی وزن جرم فوقانی است. علاوه بر این، نیروها و جرم‌های ذکر شده در نظریه راییلی اندکی بیشتر از نظریه اوایلر - برنولی باعث کاهش بسامدهای به ویژه در مودهای بالاتر می‌شود. در هر صورت در مسائل عملی در شبیه سازی جرم فوقانی به صورت جرم و یا نیرو به راحتی می‌توان از اثر آن‌ها و فراتر از آن حتی از وزن بدنه سد در تحلیل ارتعاش آزاد صرف نظر کرد.

در جدول (۶) بسامد زاویه‌ای طبیعی سد با احتساب اثر جرم فوقانی با تغییرات خطی مساحت و ممان اینرسی در بازه 0 تا $h - \Delta h = 95m$ و ثابت بودن آن‌ها در بازه $h - \Delta h$ تا $h = 100m$ نیز ارائه شده است که نتایج آن با نتایج ارائه شده سد مثلی شکل قابل مقایسه است. همان طور که نتایج نشان می‌دهد اثر تغییر مساحت و ممان اینرسی بر بسامد طبیعی نسبت به شبیه سازی جرم فوقانی به صورت جرم و یا نیروی متمرکز بر بسامد بیشتر است و در این حالت به راحتی نمی‌توان از اثر جرم فوقانی صرف نظر کرد. بنابراین درصد خطای ناشی از در نظر نگرفتن اثر جرم فوقانی برای سد ۱۰۰ متری بر اساس نظریه‌های اوایلر - برنولی و راییلی به ترتیب حدود ۸ و ۲۶ درصد خواهد بود.

مجدداً تأکید می‌گردد که در سدهای بتنی شیب m_2 در محدوده $0/8 \sim 0/7$ تغییر می‌کند، بنابراین توجه به اثر اینرسی دورانی به خصوص در بسامدهای بالاتر ضروری است.

اثر جرم فوقانی

در بخش‌های پیشین فرمول‌بندی اثر جرم فوقانی بر سد به صورت نیروی ثابت محوری P_0 در رأس سد و جرم متمرکز m مطرح شد تا اثر آن بر فرکانس طبیعی سد مورد بررسی قرار گیرد. بر این اساس در جدول (۶) نتایج حاصل از تحلیل به روش گالرگین برای سه مقدار مختلف R_m ، نیروی ناشی از اثر فقط وزن جرم فوقانی P_0 معادل ۳ درصد وزن بخش مثلی سد و نیز اثر توأم وزن جرم فوقانی و وزن بدنه سد ارائه شده است. نتایج ارائه شده در جدول (۶) گویای آن است که اثر R_m و نیز P_0 در دامنه مقدارهای واقعی خود بر بسامد طبیعی سد بسیار ناچیز است و در مودهای پایین به راحتی می‌توان از اثر آن صرف نظر کرد. علاوه بر این، وزن سد که مقدار قابل توجهی دارد و در پایداری و مقاومت سدهای بتنی وزنی نقش اساسی ایفا می‌کند. با وجود آنکه انتظار می‌رود به دلیل فشاری بودن باعث کاهش بسامد طبیعی شود، تأثیر بسیار ناچیزی بر ارتعاش جانبی سد دارد و در مودهای پایین نیز می‌توان از اثر آن صرف نظر کرد. در هر صورت وجود نیروهای فشاری P_0 ناشی از جرم فوقانی، وزن سد و جرم ناشی از جرم فوقانی باعث کاهش اندکی در بسامدهای طبیعی

جدول ۶ بسامد طبیعی ارتعاش جانبی سد به ازای شرایط متفاوت تاج سد برحسب rad/s

نظریه	شبیه سازی جرم فوقانی با	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
اوایلر - برنولی	$R_m = 0/00$	34/45	99/21	202/75	363/70	607/35
	$R_m = 0/02$	34/45	99/04	201/13	357/86	594/51
	$R_m = 0/03$	34/45	99/00	200/71	356/31	591/09
	P_0	34/45	99/21	202/75	363/70	607/35
	$P(y)$	34/45	99/21	202/74	363/70	607/35
	با احتساب اثر هندسه سازه فوقانی	33/67	92/48	187/08	344/43	587/95
راییلی	$R_m = 0/00$	33/04	90/09	167/35	260/38	362/57
	$R_m = 0/02$	33/04	89/99	166/57	258/21	358/93
	$R_m = 0/03$	33/03	89/96	166/36	257/63	357/95
	P_0	33/04	90/09	167/35	260/38	362/57
	$P(y)$	33/03	90/09	167/35	260/37	362/57
	با احتساب اثر هندسه جرم فوقانی	24/33	70/52	138/91	225/03	323/57

نتایج ارتعاش محوری

پاسخ تحلیلی

معادله دیفرانسیل ارتعاش محوری تیر اوپلر - برنولی (معادله ۲۴) برای سدهای بتنی وزنی با تغییرات خطی نیمرخ در ارتفاع سد، مطابق شکل (۱)، پس از ساده سازی به صورت رابطه (۴۱) بازنویسی می گردد:

$$v'' + \frac{A'}{A} \frac{\rho \omega^2}{E} v = 0 \quad (41)$$

پس از جای گذاری تابع مساحت بر اساس رابطه (۳۸)، با توجه به شکل (۱)، معادله دیفرانسیل همگن مرتبه ۲ با ضریب متغیر نظیر رابطه (۴۲) به دست خواهد آمد که جواب آن در رابطه (۴۳) ارائه شده است:

$$v'' + \frac{1}{h-y} \frac{\rho \omega^2}{E} v = 0 \quad (42)$$

$$v = c_1 I_0((h-y)\sqrt{\frac{\rho \omega^2}{E}}) + c_2 Y_0(-(h-y)\sqrt{\frac{\rho \omega^2}{E}}) \quad (43)$$

که در آن I_0 و Y_0 به ترتیب توابع بسل نوع یک و دو مرتبه صفر را نشان می دهند. c_1, c_2 نیز ضرایب ثابت هستند که با اعمال شرایط مرزی در تاج سد، $v'(h) = 0$ ، مقدار ثابت c_2 برابر صفر خواهد بود. با توجه به شرط مرزی در کف سد به صورت $v(0) = 0$ ، بسامد ارتعاش آزاد سد مطابق رابطه (۴۴) به دست می آید که نتایج آن در این تحقیق برای صحت سنجی مورد استفاده قرار می گیرد:

$$I_0(h\sqrt{\frac{\rho \omega^2}{E}}) = 0 \quad (44)$$

در این بخش نتایج به ازای مقدارهای فرضی اما متداول برای سدهای بتنی وزنی با مشخصات هندسی $m_1 = 0, m_2 = 0/75, h = 100$ مطابق شکل (۱) و نیز مشخصات فیزیکی و مکانیکی $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3, E = 22/4 \text{ GPa}$ ارائه می گردد. علاوه بر این سطح مقطع همانند رابطه (۳۸) و ممان قطبی از رابطه (۴۵) تعیین می گردد:

$$J(y) = I(y) + A(y)/12 \quad (45)$$

همانند نتایج ارائه شده برای ارتعاش جانبی، به منظور تحلیل حساسیت بسامد ارتعاش محوری نسبت به تعداد مودها، در جدول (۷) نتایج نسبت بسامدهای زاویه ای سد در ارتعاش محوری برای ۸ مود مختلف برای نظریه های نظیر اوپلر - برنولی و رایلی به ازای سه N مختلف ارائه شده است. مطابق این جدول،

مقدار بسامد ارتعاش محوری برای سدهای بتنی وزنی، در دامنه متعارف مشخصات هندسی و مکانیکی خود، در مودهای پایین تر بیش تر از مقادیر نظری در ارتعاش جانبی می باشد. ضمن اینکه وابستگی ارتعاش محوری در روش گالرگین به تعداد مودهای مورد نیاز N نسبت به ارتعاش جانبی بسیار کمتر است و به همین دلیل مقایسه بسامدهای حاصل از دو نظریه فقط برای N برابر ۱، ۴ و ۸ ارائه شده است. علاوه بر این، به منظور مقایسه نتایج تحت شرایط یکسان، تعداد جملات پاسخ آزمایشی در ارتعاش محوری نیز برابر $N = 8$ در نظر گرفته شده است.

علاوه بر این، جدول (۷) نشان می دهد که بسامدهای طبیعی در تمام مودها مطابق نظریه رایلی کمتر از نظریه نظیر اوپلر - برنولی به دست می آید. این اختلاف بسامدهای طبیعی در مودهای پایین تر بسیار ناچیز و قابل اغماض است و در مودهای بالاتر این اختلاف بیشتر می شود و در مود هشتم به $1/13$ برابر می رسد که همانند ارتعاش جانبی این اختلاف را می توان به کاهش سختی در نظریه رایلی نسبت داد. برخلاف ارتعاش جانبی، اثر اینرسی دورانی بر بسامد طبیعی حتی در مودهای بالاتر قابل توجه نیست و با تقریب می توان از اثر آن صرف نظر کرد.

به منظور صحت سنجی نتایج در ارتعاش محوری به روش گالرگین، همانند ارتعاش جانبی ابتدا برای حالت خاص که در آن نیمرخ عرضی تیر ثابت است، به دست آمدند و با نتایج تحلیل دقیق در مراجع مختلف از جمله مرجع [1] مقایسه شدند. نتایج حاصل با دقت بسیار خوبی بر هم منطبق بودند که به دلیل محدودیت حجم مقاله از ارائه آن خودداری می شود. به منظور صحت سنجی، نتایج حاصل از روش گالرگین برای یک سد بتنی مثلثی شکل بر اساس نظریه های نظیر اوپلر - برنولی و رایلی با نتایج حاصل از رابطه تحلیلی رابطه (۴۴) برای بسامد ارتعاش محوری در جدول (۸) مورد مقایسه قرار گرفته است.

خطای حاصل از نتایج ارائه شده در جدول (۸) برای بسامدهای طبیعی ارتعاش محوری به روش گالرگین، علی رغم تقریبی بودن آن، در مقایسه با روش دقیق مبتنی بر نظریه اوپلر - برنولی در بدترین حالت که مربوط به بالاترین مود مورد بررسی، مود هشتم، می باشد فقط به $0/03$ درصد می رسد که گویای دقت روش گالرگین علی رغم تقریبی بودن آن می باشد.

جدول ۷. بسامد طبیعی ارتعاش محوری سد حاصل از نظریه نظیر اوپلر - برنولی و رابلی و نسبت آن‌ها برحسب rad/s

j								N
1	2	3	4	5	6	7	8	
$\frac{72/28}{72/27} = 1/00$	-	-	-	-	-	-	-	1
$\frac{71/99}{71/77} = 1/00$	$\frac{165/25}{163/48} = 1/01$	$\frac{259/08}{252/72} = 1/03$	$\frac{353/23}{337/89} = 1/05$	-	-	-	-	4
$\frac{71/99}{71/77} = 1/00$	$\frac{165/24}{163/46} = 1/01$	$\frac{259/04}{252/71} = 1/03$	$\frac{352/96}{337/42} = 1/05$	$\frac{446/94}{415/98} = 1/07$	$\frac{540/95}{487/47} = 1/11$	$\frac{634/98}{556/95} = 1/14$	$\frac{729/21}{647/84} = 1/13$	8

جدول ۸. مقایسه نتایج بسامد طبیعی ارتعاش محوری حاصل از روش گالرکین و روش دقیق، $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$

روش	نظریه	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8
گالرکین	نظیر اوپلر - برنولی	71/99	165/24	259/04	352/96	446/94	540/94	634/98	729/21
	رابلی	71/77	163/46	252/71	337/42	415/98	487/47	556/95	647/84
رابطه (۴۲)	نظیر اوپلر - برنولی	71/98	165/23	259/03	352/96	446/93	540/93	634/93	728/95

جدول ۹. مقادیر بسامد طبیعی ارتعاش محوری سد با شرایط متفاوت در تاج سد، $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$

نظریه	R_m	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
نظیر اوپلر - برنولی	0/00	71/99	165/24	259/04	352/97	446/95
	0/02	71/99	165/24	259/05	353/05	447/12
	0/03	71/99	165/24	259/04	352/10	447/00
	با احتساب اثر هندسه جرم فوقانی	71/98	141/06	235/10	329/13	423/17
رابلی	0/00	71/77	163/47	252/71	337/42	416/03
	0/02	71/77	163/47	252/72	337/47	416/23
	0/03	71/77	163/47	252/71	337/44	416/11
	با احتساب اثر هندسه جرم فوقانی	71/43	161/74	248/73	330/93	407/50

اثر جرم فوقانی

به منظور تعیین اثر جرم فوقانی بر بسامد طبیعی ارتعاش محوری سد، نتایج حاصل از تحلیل به روش گالرکین به ازای سه مقدار R_m در جدول (۹) ارائه شده است.

بررسی نتایج ارائه شده در جدول (۹) گویای آن است که اثر R_m در محدوده انتخابی اثر بسیار کمی بر بسامد طبیعی محوری سد دارد و به راحتی و همانند ارتعاش جانبی می‌توان از اثر آن صرف نظر کرد.

در جدول (۹) مقدار بسامد طبیعی سد نیز به ازای شبیه‌سازی هندسه جرم فوقانی ارائه شده که در آن تغییرات مساحت و ممان

قطبی از کف سد تا ارتفاع ۹۵ متر به صورت خطی و در ۵ متر ارتفاع آزاد با مساحت و ممان قطبی ثابت در نظر گرفته شده است. نتایج نشان می‌دهد که مانند ارتعاش جانبی، تأثیر در نظر گرفتن هندسه سد بیشتر از اثر جرم متمرکز است و درصد خطا نسبت به سد مثلی بدون اثر جرم فوقانی در نظریه‌های اوپلر - برنولی و رابلی به ترتیب تا حدود ۹ و ۲ درصد می‌باشد.

شکل مود

روش ارائه شده در این پژوهش، همان طور که پیشتر بیان گردید، قادر به تعیین شکل مودها نیز می‌باشد. بدین منظور و با توجه به

دلیل همگرایی کندتر ضرورت پیدا می‌کند. انطباق پاسخ به روش گالرکین با افزایش مقدار N به سمت پاسخ تحلیلی مجدداً دلیلی بر صحت روش گالرکین مورد استفاده در این پژوهش می‌باشد.

نتیجه‌گیری

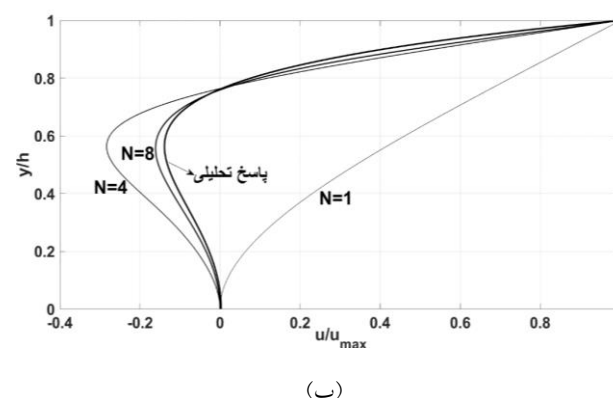
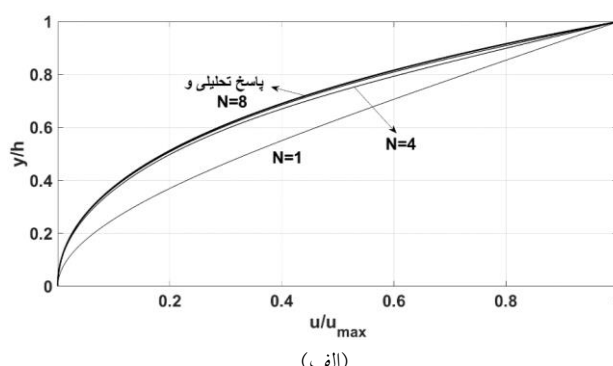
در این پژوهش ارتعاش آزاد جانبی و محوری سدهای بتنی وزنی مثلثی شکل به همراه اثر گله‌گی و مدل‌سازی آن به صورت جرم متمرکز و در نظر گرفتن شرایط مرزی ناشی از آن و نیز اثر نیروی وزن سازه فوقانی و وزن بدنه سد برای ارتعاش جانبی به روش گالرکین مورد بررسی قرار گرفت. بدین منظور با مدل کردن سد بتنی وزنی به صورت تیر طره با تغییرات خطی نیمرخ عرضی و اعمال شرایط مرزی به صورت دقیق در کف و تاج سد، بر اساس نظریه‌های اوایلر - برنولی و رایلی در ارتعاش آزاد جانبی و نیز نظریه‌های نظیر اوایلر - برنولی و رایلی در ارتعاش آزاد محوری، بسامدزویه‌ای سد در حالت‌های مختلف تعیین گردید. بر این اساس می‌توان نتایج را به شرح زیر بیان کرد:

۱. روش گالرکین با دقت بسیار خوبی قادر به تحلیل ارتعاش آزاد سد است و نتایج حاصل از آن قابل اعتماد است.
۲. ارتعاش آزاد جانبی سدهای بتنی مثلثی شکل به صورت توابع بسط مرتبه اول نوع یک و دو و اصلاح شده نوع یک و دو هست و بر اساس آن می‌توان مقادیر بسامدهای زاویه‌ای در ارتعاش آزاد جانبی را به صورت دقیق تعیین کرد.
۳. ارتعاش آزاد محوری سدهای بتنی مثلثی شکل به صورت تابع بسط مرتبه اول نوع یک است و بر اساس آن می‌توان مقدار بسامدهای طبیعی در ارتعاش آزاد محوری را به صورت دقیق تعیین کرد.

۴. شبیه‌سازی سازه فوقانی سد به صورت جرم یا نیروی متمرکز نشان می‌دهد که سازه فوقانی تأثیر قابل ملاحظه‌ای بر بسامد ارتعاش آزاد جانبی و محوری سد در نظریه‌های اوایلر - برنولی و رایلی ندارد. در حالی که در نظر گرفتن آن به صورت قطعه‌ای با مساحت ثابت در ارتفاع لزوم در نظر گرفتن سازه فوقانی را اجتناب‌ناپذیر می‌کند.

۵. نظریه اوایلر - برنولی در ارتعاش جانبی و نظیر آن در ارتعاش محوری همواره بسامدهای بزرگ‌تری را در قیاس با تئوری رایلی نتیجه می‌دهد که در مودهای پایین‌تر این اختلاف کمتر ولی در مودهای بالاتر به ویژه برای ارتعاش جانبی قابل توجه

مشخص بودن بسامدهای زاویه‌ای، از رابطه (۱۱) می‌توان برای تعیین $\tilde{c}$ استفاده کرد و سپس به کمک رابطه (۵) شکل مود را تعیین کرد که به طور معمول به ازای مقیاس کردن بیشینه تغییر مکان در مود مورد نظر به اندازه واحد صورت می‌پذیرد. به عنوان نمونه شکل مود سد مثلثی قائم‌الزاویه با مشخصات هندسی $m_1 = 0, m_2 = 0/75, h = 100$ مطابق شکل (۱)، و نیز مشخصات فیزیکی و مکانیکی مصالح سد $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3, E = 22/4 \text{ MPa}$ در شکل (۲) برای مودهای اول و دوم به ازای مقادیر مختلف N ارائه شده و با شکل مود حاصل از رابطه تحلیلی ۴۰ تحت همان شرایط مقایسه گردیده است.



شکل ۲ مود ارتعاشی سد مثلثی به روش گالرکین به ازای مقادیر مختلف N و روش تحلیلی: (الف) مود اول و (ب) مود دوم

در شکل مذکور جابه‌جایی سازه در مود مورد نظر به جابه‌جایی بیشینه که در اینجا در رأس سد اتفاق می‌افتد بی‌بعد گردیده است. در شکل (۲ - الف) به ازای $N = 8$ شکل مود تقریباً بر پاسخ تحلیلی منطبق می‌گردد در حالی که در مود دوم قدری اختلاف وجود دارد. این اختلاف در مودهای بالاتر بیشتر می‌گردد که در این صورت لزوم در نظر گرفتن N بزرگ‌تر به

R_m	نسبت جرم بخش فوقانی به جرم بخش مثلثی	است. بنابراین استفاده از نظریه اویلر - برنولی در تحلیل ارتعاش آزاد سدها در موده‌های بالاتر خطای قابل توجهی را در پی خواهد داشت.
m_θ	جرم دورانی	
$m_1, m_{a\theta}, m_a$	جرم	
v	تغییر مکان محوری در مختصات مکانی	فهرست علائم
$\bar{v}$	تغییر مکان محوری در مختصات مکانی و زمانی	M جرم بخش مثلثی سد
u	ضریب پواسون	m جرم بخش فوقانی سد
J	ممان قطبی نیمرخ طولی	h ارتفاع سد
t	متغیر زمان	Δh ارتفاع آزاد سد
m_a	جرم محوری	E ضریب کشسانی
k_a	سختی محوری	I ممان اینرسی
$\bar{m}$	مجموع شیب‌های سرآب و پایاب	u تغییر مکان جانبی در مخاصات مکانی
m_1	شیب سرآب	C ماتریس میرایی
m_2	شیب پایاب	ρ کرم حجمی
ε	خطا	A مساحت نیمرخ طولی
J_1	تابع بسل نوع یک مرتبه یک	P نیروی محوری
Y_1	تابع بسل نوع دو مرتبه یک	q بار گسترده جانبی
I_1	تابع بسل اصلاح شده نوع یک مرتبه یک	$\bar{u}$ تغییر مکان جانبی در مختصات مکانی و زمانی
K_1	تابع بسل اصلاح شده نوع دو مرتبه یک	$\bar{u}$ سرعت جانبی در مختصات مکانی و زمانی
a	ضریب	$\bar{u}$ شتاب جانبی در مختصات مکانی و زمانی
$P(y)$	بار گسترده محوری	N تعداد جملات سری
P_0	نیروی متمرکز محوری	ω بسامد زاویه‌ای جانبی
J_0	تابع بسل نوع ۱ مرتبه صفر	ϖ بسامد زاویه‌ای محوری
Y_0	تابع بسل نوع ۲ مرتبه صفر	j شمارنده، زیرنویس
y	مختصه مکانی	ϕ_i تابع قیاسی
		R مانده
	واژه‌نامه	β_i ضریب
section	نیمرخ	λ, λ_i مقادیر ویژه
Roller Compacted Concrete,	بتن غلتکی کوبیده	$\tilde{c}, c_i$ بردار ویژه
RCC		$[m]$ ماتریس جرم
classic	متداول	$[k]$ ماتریس سختی
Rotary inertia	اینرسی دورانی	φ تابع دل‌خواه
Euler-Bernoulli Beam	نظریه تیر اویلر - برنولی	k_{p0} ماتریس متناظر با نیروی محوری در ماتریس سختی
Theory, EBT		

functionally graded materials, FGM	مصالح مدرج تابعی	Elementary beam theory, EBT	نظریه مقدماتی تیر
differential transform method, DTM	روش تبدیل دیفرانسیلی	Engineeing beam theory, EBT	نظریه مهندسی تیر
Comparison functions	تابع قیاسی	Elastic	کشسان
Collocation mthod	روش ترتیبی	natural frequency	بسامد طبیعی
nontrivial	غیربدیهی	variational methods	روش های تغییرات
		Galerkin weighted residual method	روش مانده وزنی
		nonconservative	گالرکین
			ناپایستار

تقدیر و تشکر

مراجع

- [1] Rao, S.S., *Vibration of Continious Systems*, Jhon Wiley&Sons, Hoboken, New Jersey, USA, 2007.
- [2] Rayleigh, B., *The Theory of Sound*, Volume 1, London: Macmillan, reprinted by Dover, New York, USA, 1945.
- [3] W. Ritz, "Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik," *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, vol. 135, pp. 1–61, 1909. <https://doi.org/10.1515/crll.1909.135.1>
- [4] H. H. Mabie and C. B. Rogers, "Transverse vibration of double-tapered cantilever beams," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 51, pp. 1771–1774, 1972. <https://doi.org/10.1121/1.1913028>.
- [5] H. H. Mabie and C. B. Rogers, "Transverse vibration of double-tapered cantilever beams," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 51, pp. 1771–1774, 1972. <https://doi.org/10.1121/1.1911327>
- [6] W. Carnegi and J. Thomas, "The coupled bending–bending vibration of pre-twisted tapered blading," *Journal of Engineering for Industry*, vol. 94, no. 1, pp. 255–266, 1972. <https://doi.org/10.1115/1.3428120>
- [7] R. P. Goel, "Vibration of a beam carrying a concentrated mass," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 40, no. 3, pp. 821–822, 1973. [https://doi.org/10.1016/0022-460x\(76\)90403-x](https://doi.org/10.1016/0022-460x(76)90403-x)
- [8] R. C. Hibler, "Free vibration of a beam supported by unsymmetrical spring-hinges," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 42, pp. 501–502, 1975. <https://doi.org/10.1115/1.3423612>
- [9] J. H. Lau, "Vibration frequencies of tapered bars with end mass," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 51, no. 1, pp. 179–181, 1984. <https://doi.org/10.1115/1.3167564>
- [10] M. C. Ece, M. Aydogdu, and V. Taskin, "Vibration of a variable cross-section beam," *Mechanics Research Communications*, vol. 34, no. 1, pp. 78–84, 2007. <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2006.06.005>
- [11] A. Shahba and S. Rajasekaran, "Free vibration and stability of tapered Euler–Bernoulli beams made of axially functionally graded materials," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 36, no. 7, pp. 3094–3111, 2012. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2011.09.073>
- [12] R. Banerjee and F. W. Williams, "Exact Bernoulli–Euler static stiffness matrix for a range of tapered beam-columns," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 23, no. 9, pp. 1615–1628, 1986. <https://doi.org/10.1002/nme.1620230904>

- [13] S. Arbate, "Vibration of non-uniform rods and beams," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 185, no. 4, pp. 703–716, 1995. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1995.0410>
- [14] M. C. Ece, M. Aydogdu, and V. Taskin, "Vibration of variable cross-section beam," *Mechanics Research Communications*, vol. 34, no. 1, pp. 78–84, 2007. <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2006.06.005>
- [15] Y. Mou, R. S. P. Han, and A. H. Shah, "Exact dynamic stiffness matrix for beams of arbitrary cross section," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 40, no. 2, pp. 233–250, 1997. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19970130\)40:2<233::AID-NME61>3.0.co;2-0](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19970130)40:2<233::AID-NME61>3.0.co;2-0)
- [16] G. Fenves and A. K. Chopra, *Earthquake Analysis and Response of Concrete Gravity Dams*, Report No. UCB/EERC-84/10, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, CA, USA, 1984.
- [17] B. Miquel and N. Bouaanani, "Simplified evaluation of the vibration period and seismic response of gravity dam–water systems," *Engineering Structures*, vol. 32, pp. 2488–2502, 2010.
- [18] R. Attarnejad and A. Farsad, "Closed form solution of dam–reservoir interaction in time domain considering dam thickness," *Journal of Technical Faculty*, vol. 39, no. 3, pp. 329–340, 2005. [In Persian]
- [19] R. Attarnejad and A. K. Ghorbani-Tanha, "A general fourth-order ordinary differential equation with solution in terms of Bessel function: theory and engineering application," *Structural Engineering and Mechanics*, vol. 27, no. 6, pp. 773–776, 2007. <http://dx.doi.org/10.12989/sem.2007.27.6.773>
- [20] P. Elyasi, B. Navayi Neyaa, and F. Rahmani Firoozjaee, "Free vibration analysis of viscoelastic non-locally damped Rayleigh beam using Galerkin method, null space of the matrix & Neumann series expansion," *Journal of Modares Civil Engineering*, vol. 22, no. 5, pp. 63–76, 2022. [In Persian]. <https://doi.org/10.22034/22.5.63>
- [21] P. Elyasi, B. Navayi Neyaa, and F. Rahmani Firoozjaee, "Free vibration of viscoelastic nonlocally damped tapered axially functionally graded beams using the state-space formulation," *Engineering Structures*, vol. 288, 2023. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2023.116183>

