



Ferdowsi
University of
Mashhad

Ferdowsi Civil Engineering

<https://civil-ferdowsi.um.ac.ir>



Iranian
Concrete
Institute



Pavement
Engineering
Association of
Iran

A Quantitative Assessment of the Accuracy of the Third-Order Acceleration Method Compared to Other Numerical Methods Under Harmonic Loading – A Case Study of a Softening Two-Degree-of-Freedom Structure

Research Article

Masoud Mahmoodabadi¹ , Fatemeh Ansari², Fatemeh Hatfi Ardakani³

DOI: [10.22067/jfcej.2025.91623.1337](https://doi.org/10.22067/jfcej.2025.91623.1337)

1-Introduction:

In general, the dynamic behaviour of structures can be considered either linear or nonlinear, with the governing differential equation being a second-order differential equation. The solution methods are typically divided into two main categories: the mode superposition method and the direct time integration method. In nonlinear systems, if the structural response at a specific time t^* is required, the interval $[0, t]$ is divided into n^* sub-intervals, usually of equal size (Δt). Within each sub-interval ($t = n\Delta t$), the structural properties such as stiffness are assumed to be constant, and the response at the end of each step is calculated. This response is then used as the initial condition for the subsequent step. Among conditionally stable time integration methods, the Newmark linear acceleration method and the central difference method are widely used due to their accuracy. In these two classical approaches, the acceleration is assumed to vary at most linearly within each time step. In this study, however, the acceleration variation within each time step is assumed to be cubic (third-order). Consequently, when the acceleration is represented by a third-order polynomial, the displacement function becomes a fifth-degree polynomial with six coefficients. Since higher-order acceleration introduces more terms into the Taylor series expansion compared to the classical methods, it is expected that the proposed third-order acceleration method will provide greater accuracy. Nevertheless, because this research focuses on a nonlinear softening system, the increase in acceleration order does not necessarily guarantee improved accuracy. For evaluating the weighted residual integral, the least-squares method was applied. In this study, computational tools such as MATLAB were employed to quantitatively compare the accuracy of the proposed third-order acceleration method against other classical methods, including the Newmark average

acceleration method, the Newmark linear acceleration method, the Wilson- θ method, and the parabolic acceleration method.

2. Methodology

In this paper, the acceleration variation in each time step is considered cubic, which represents the novel contribution of the research. To the authors' knowledge, the extension of the third-order acceleration method has been developed for the first time, at least in Iran. The reference solution employed here is the exact response of a shear building with nonlinear softening behavior under sinusoidal loading. Approximate responses obtained from the Newmark methods and the parabolic acceleration method were compared with the exact response through time-history diagrams of the displacements of the first and second stories. The errors of eight different numerical methods were calculated quantitatively and compared. The displacement response of a nonlinear softening two-degree-of-freedom system was analyzed under a range of sinusoidal loadings with varying frequencies and amplitudes.

The angular frequency of the sinusoidal loading was varied from 1 to 30 rad/s, with increments of 0.1 rad/s, yielding 300 different loading cases. The system response under these cases was computed using the eight numerical methods discussed in this study. Using the analytical response method with $\Delta t = 0.001$ s, the displacement response was obtained and regarded as the exact solution. Then, for Δt values of 0.001, 0.002, 0.003, 0.004, 0.005, 0.006, and 0.007 s, the displacement response of the system was computed for peak ground accelerations (PGAs) of 1, 2, 3, 4, and 5 (m/s^2) using the eight numerical methods. The root mean square errors were calculated for the defined Δt values. To compare the performance of the methods, the mean errors over different frequencies and their

* Manuscript received January 12, 2025, Revised June 10, 2025, Accepted October 04, 2025.

¹ Corresponding author. Assistant Professor, Department of Civil Engineering, University of Qom, Qom, Iran.

Email: m.mahmoudabadi@qom.ac.ir.

² Senior student of Structures, Faculty of Engineering, University of Qom, Qom, Iran.

³ Senior student of Structures, Faculty of Engineering, University of Qom, Qom, Iran.

coefficients of variation were evaluated. Additionally, the parabolic acceleration method was extended to a third-order acceleration method, and its error and coefficient of variation were compared with those of the second-order (parabolic) acceleration method.

In Figure (1), the average error averages for different numerical methods for Δt equal to 0.001 seconds to 0.007 seconds for the first floor of a softening shear building are plotted as a bar graph.

3. Conclusion

The results showed that, in the first story, for Δt values ranging from 0.001 to 0.007 seconds, the minimum mean error in most cases was associated with the analytical response method and the Newmark average acceleration method, while the maximum mean error in most cases corresponded to the central difference and Wilson methods. In the second story, with the same Δt range, the minimum mean error in most cases corresponded to the central difference method, whereas the maximum mean error was associated with the Jennings method. Regarding the coefficient of variation, in the first story and within the same Δt range, the maximum value in most cases was related to the second-order acceleration and Wilson methods, while the minimum was related to the Newmark linear acceleration and Newmark average acceleration methods. In the second story, the maximum coefficient of

variation in most cases was associated with the central difference method, while the minimum corresponded to the Wilson method. In both stories, the mean error and the coefficient of variation for the second-order and third-order acceleration methods generally showed only minor differences. Overall, in the first story, the analytical response method had the lowest mean error, while the Wilson method exhibited the highest mean error. The second-order and third-order acceleration methods ranked second and fourth, respectively. In the second story, the central difference method had the lowest mean error, while the Jennings method had the highest mean error. The second-order and third-order acceleration methods ranked sixth and seventh, respectively. From the perspective of the coefficient of variation, in the first story, the highest value corresponded to the analytical response method, and the lowest to the Newmark average acceleration method, with the second-order and third-order acceleration methods ranked sixth and seventh, respectively. In the second story, the highest coefficient of variation was related to the central difference method, while the lowest was associated with the Wilson method. The second-order and third-order acceleration methods ranked fourth and fifth, respectively.

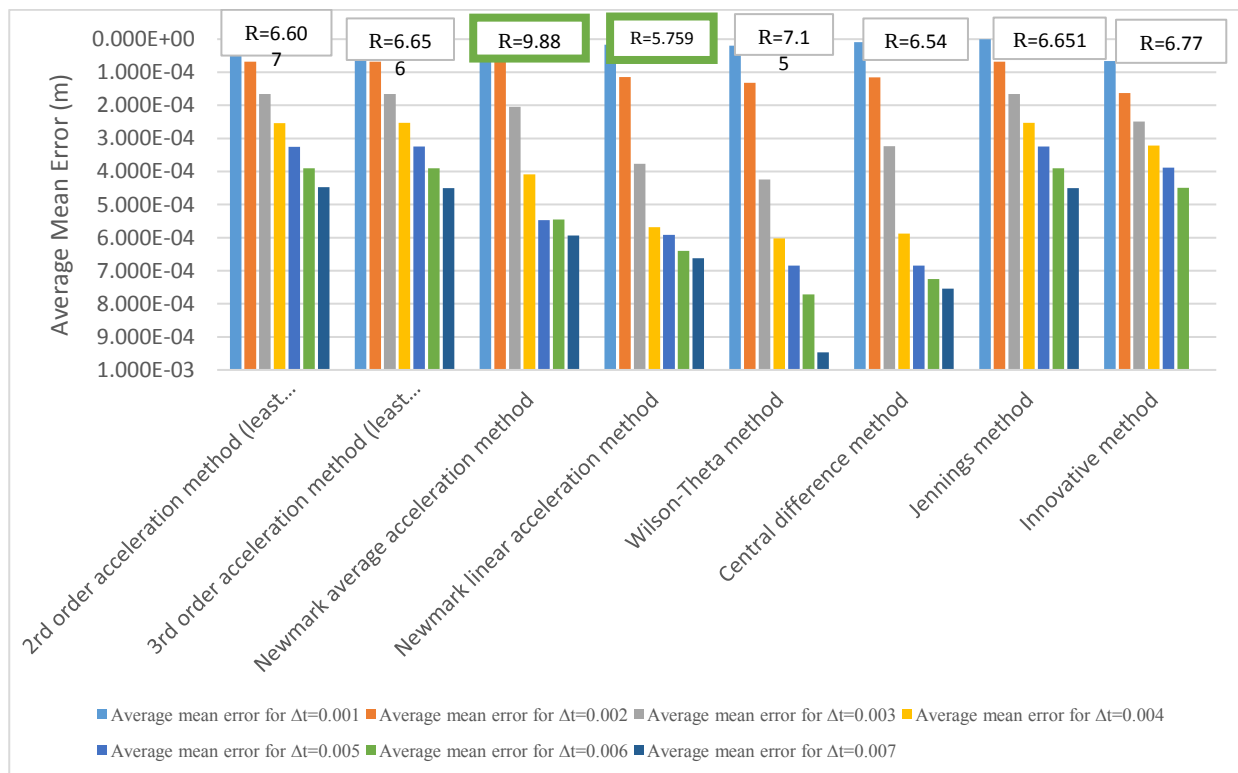


Figure. 1: Average value of the error means of different numerical methods for Δt equal to 0.001 seconds to 0.007 seconds for the first floor of a softening shear building



بررسی کمی میزان دقت روش شتاب مرتبه ۳ نسبت به روش‌های دیگر عددی برای بارگذاری هارمونیک - مطالعه موردی یک سازه نرم شونده دو درجه آزاد*

مقاله پژوهشی

فاطمه هاتفی اردکانی^(۳)

فاطمه انصاری^(۲)

مسعود محمودآبادی^(۱) 

DOI: 10.22067/jfcei.2025.91623.1337

چکیده در این مقاله، پاسخ جابه‌جایی یک سیستم دو درجه آزاد نرم شونده غیر خطی، تحت طیفی از بارگذاری‌های سینوسی با فرکانس‌های مختلف و به ازای PGAهای متفاوت مورد بررسی قرار گرفته است. از ۸ روش عددی که شامل روش شتاب مرتبه ۳، روش شتاب مرتبه ۲، روش نیومارک (روش شتاب خطی)، روش نیومارک (روش شتاب متوسط)، روش ویلسون - تتا، روش تفاضل مرکزی، روش جینگز و روش پاسخ تحلیلی بود، برای محاسبه پاسخ جابه‌جایی این سیستم استفاده گردید. با استفاده از این هشت روش، جابه‌جایی این سیستم به ازای PGAهای مختلف محاسبه گردید و مقادیر جذر میانگین مربعات خطا و ضریب تغییرات خطای این ۸ روش به ازای Δt های مختلف محاسبه گردید که نتایج کار به صورت نمودارهایی میله‌ای آورده شده است.

واژه‌های کلیدی روش شتاب مرتبه ۳، روش‌های عددی در دینامیک سازه‌ها، سیستم نرم شونده، جذر میانگین مربعات خطا، ضریب تغییرات خطا.

A Quantitative Assessment of the Accuracy of the Third-Order Acceleration Method Compared to Other Numerical Methods Under Harmonic Loading – A Case Study of a Softening Two-Degree-of-Freedom Structure

Masoud Mahmoodabadi

Fatemeh Ansari

Fatemeh Hatfi Ardakani

Abstract In this paper, the displacement response of a nonlinear two-degree-of-freedom softening system is investigated under a range of sinusoidal loadings with different frequencies and for different PGAs. Eight numerical methods including the 3rd-order acceleration method, the 2nd-order acceleration method, the Newmark method (linear acceleration method), the Newmark method (average acceleration method), the Wilson-Theta method, the central difference method, the Jennings method and the innovative method were used to calculate the displacement response of this system. Using these eight methods, the displacement of this system was calculated for different PGAs and the values of the root mean square error and the error coefficient of variation of these 8 methods were calculated for different Δt s, and the results of the work are presented in the form of bar graphs.

Keywords 3rd-Order Acceleration Method, Numerical Methods in Structural Dynamics, Softening System, Root Mean Square Error, Error Coefficient of Variation.

* تاریخ دریافت مقاله ۱۴۰۳/۱۰/۲۳ و تاریخ پذیرش آن ۱۴۰۴/۷/۱۲ می‌باشد.

Email: m.mahmoudabadi@qom.ac.ir

(۱) نویسنده مسئول، استادیار، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه قم، قم، ایران.

(۲) فارغ التحصیل کارشناسی ارشد مهندسی سازه، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه قم، قم، ایران.

(۳) فارغ التحصیل کارشناسی ارشد مهندسی سازه، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه قم، قم، ایران.

مقدمه

در حالت کلی، رفتار دینامیکی سازه‌ها به دو صورت خطی و غیر خطی در نظر گرفته می‌شود که معادله دیفرانسیل حاکم بر این سیستم‌ها یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خواهد بود به طوری که روش‌های حل آن به دو دسته کلی روش جمع آثار مدی و روش انتگرال‌گیری مستقیم زمانی دسته‌بندی می‌شود.

در سیستم‌های غیر خطی، اگر پاسخ سازه در لحظه t مورد نظر باشد، طبق روش انتگرال‌گیری مستقیم زمانی، ابتدا بازه $[0, t]$ به n زیربازه تقسیم می‌شود و معمولاً طول این زیربازه‌ها (Δt) را با هم مساوی در نظر می‌گیرند. در هر یک از این زیربازه‌ها $(\Delta t = t/n)$ خصوصیات سازه مانند سختی، ثابت در نظر گرفته می‌شود و پاسخ در انتهای هر گام محاسبه می‌شود و سپس، از این پاسخ به عنوان شرایط اولیه برای گام بعدی استفاده می‌شود. از بین روش‌های انتگرال‌گیری زمانی مشروط پایدار، روش‌های شتاب خطی نیومارک و تفاضل مرکزی به علت دقت خوب، بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرند که در این دو روش کلاسیک، مرتبه تغییرات شتاب، حداکثر به صورت خطی تغییر می‌کند.

در مرجع [1] مرتبه تغییرات شتاب در هر گام زمانی به صورت سهموی فرض می‌شود که در نتیجه چندجمله‌ای مرتبه چهار تابع جابه‌جایی، دارای پنج ضریب مجهول خواهد بود. در این تحقیق، این مقاله به عنوان مرجع اصلی در نظر گرفته شد با این تفاوت که مرتبه تغییرات شتاب در هر گام زمانی به صورت درجه ۳ در نظر گرفته شد. در نتیجه، در این حالت که شتاب به صورت چندجمله‌ای مرتبه سوم در نظر گرفته شد، تابع جابه‌جایی، یک تابع درجه ۵ با شش ضریب بود. با توجه به اینکه با افزایش مرتبه شتاب، تعداد جملات بیشتری در بسط سری تیلور نسبت به روش‌های کلاسیک موجود در نظر گرفته می‌شود بنابراین انتظار می‌رود که در روش پیشنهادی با مرتبه شتاب درجه ۳، دقت آن نسبت به روش‌های کلاسیک دیگر بالاتر باشد. در این پژوهش، چون مطالعه موردی بر روی یک سیستم غیر خطی نرم شونده صورت گرفته است در نتیجه، لزوماً با افزایش مرتبه شتاب، دقت تحلیل افزایش نمی‌یابد. در این روش برای محاسبه انتگرال باقی‌مانده وزن‌دار از روش حداقل مربعات استفاده شد.

غلامپور و همکاران [1]، یک روش باقی‌مانده وزن‌دار با استفاده از چند تابع وزنی برای حل مسائل دینامیکی غیر خطی سازه‌ها ارائه دادند. آن‌ها مرتبه تغییرات شتاب را در هر گام زمانی

به صورت سهموی فرض کردند. در نتیجه چندجمله‌ای جابه‌جایی مربوطه از درجه ۴ بود و لازم بود که پنج ضریب مجهول این چندجمله‌ای محاسبه گردد. آن‌ها برای محاسبه این پنج ضریب مجهول از پنج معادله استفاده کردند. آن‌ها سه معادله از این ۵ معادله را از ارضای معادلات جابه‌جایی، سرعت و شتاب در ابتدای هر گام به دست آوردند. آن‌ها دو معادله دیگر را با محاسبه انتگرال باقی‌مانده وزن‌دار و با چهار تابع وزنی؛ واحد، پترو گالرکین، حداقل مربعات و کالوکیشن به دست آوردند. آن‌ها اذعان داشتند که از روش شتاب سهموی پاسخ‌های بهتر و دقیق‌تری حاصل می‌گردد.

قاسمیه و کریمی راد [2]، یک روش جدید انتگرال‌گیری زمانی برای حل معادله حرکت پیشنهاد کردند. آن‌ها بیان داشتند با افزایش مرتبه تغییرات شتاب به صورت سهموی، دقت انتگرال‌گیری افزایش می‌یابد و روش جدید به صورت غیر مشروط پایدار است. آن‌ها همچنین اذعان داشتند در سازه‌های چند درجه آزادی برای میرا شدن اثر مدهای مصنوعی از پاسخ سازه بایستی از یک الگوریتم انتگرال‌گیری با میرایی عددی استفاده شود.

غلامپور و قاسمیه [3]، یک روش جدید انتگرال‌گیری مستقیم زمانی برای حل مسائل دینامیکی غیر خطی سازه‌ای ارائه کردند. در روش پیشنهادی آن‌ها مرتبه انتگرال‌گیری زمانی آن‌ها بالاتر از مرتبه انتگرال‌گیری خانواده روش‌های مرسوم نیومارک بود. آن‌ها تغییرات شتاب را در هر گام زمانی به صورت درجه ۲ در نظر گرفتند. آن‌ها از دو پارامتر متغیر برای افزایش پایداری و دقت روش خود استفاده کردند. آن‌ها نتایج به دست آمده از این روش جدید مرتبه بالاتر را با روش ضمنی ویلسون - تتا و نیز روش شتاب متوسط نیومارک مقایسه کردند.

غلامپور و قاسمیه [4]، یک روش جدیدی برای حل مسائل دینامیکی غیر خطی با استفاده از انتگرال‌گیری مستقیم زمانی پیشنهاد دادند. در روش پیشنهادی آن‌ها که شامل مجموعه‌ای از روش‌های مستقیم انتگرال‌گیری زمانی بود، مرتبه انتگرال‌گیری بالاتر از روش‌های کلاسیک و متعارف بود. در روش پیشنهاد شده توسط آن‌ها، تغییرات درجه دوم برای شتاب در هر گام زمانی فرض می‌گردید. آن‌ها نتایج به دست آمده از این روش جدید مرتبه بالاتر را با روش تفاضل مرکزی و نیز روش شتاب خطی نیومارک مقایسه کردند. آن‌ها اذعان داشتند با توجه به مرتبه

که در نتیجه، معادله تغییر مکان آن که با دو بار انتگرالگیری از معادله شتاب به دست می‌آید یک منحنی درجه پنج است که دارای شش ضریب مجهول می‌باشد. برای مقایسه کمی میزان خطای این روش با دیگر روش‌های مطرح عددی، یک سیستم یک درجه آزاد خطی با فرکانس یک هرتز و میرایی‌های مشخص ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد در نظر گرفته شد. سپس، به این سیستم، بارگذاری هارمونیک سینوسی با فرکانس مشخص اعمال گردید. پاسخ دقیق این سیستم در کتب دینامیک سازه‌ها موجود است. نسبت فرکانس بارگذاری به فرکانس ارتعاش طبیعی سیستم از ۰/۱ تا ۳ با افزایش ۰/۱ تغییر می‌کرد. مقایسه برای ده Δt که کوچک‌ترین آن‌ها برابر با ۰/۲ ثانیه و بزرگ‌ترین آن‌ها برابر با ۰/۲۰ ثانیه بود انجام گردید. میزان کاهش خطا برای روش شتاب مرتبه سه نسبت به روش شتاب مرتبه دوم ناچیز بود. کمترین خطا مربوط به روش جنینگز ارتقا یافته و بیشترین خطا نیز در بعضی Δt ها مربوط به روش ویلسون و در سایر Δt ها مربوط به روش تفاضل مرکزی است.

محمودآبادی و همکاران [9]، به بررسی پاسخ جابه‌جایی یک سیستم یک درجه آزاد سخت‌شونده غیر خطی تحت بارگذاری‌های سینوسی با فرکانس‌ها و دامنه‌های مختلف پرداختند. در این مطالعه، با استفاده از ۹ روش عددی، پاسخ جابه‌جایی سیستم در شرایط مختلف محاسبه گردید. با استفاده از روش ابداعی و استفاده از Δt برابر با ۰/۰۱ ثانیه، پاسخ جابه‌جایی سیستم به عنوان پاسخ دقیق سیستم قلمداد گردید. نتایج بررسی‌ها نشان داد که خطای روش شتاب مرتبه ۳ نسبت به خطای روش شتاب مرتبه ۲ به ازای Δt ها و دامنه نیروهای مختلف، تفاوت چندانی با یکدیگر نداشتند. همچنین، کمترین میزان خطا، عموماً مربوط به روش جنینگز ارتقا یافته و بیشترین آن اغلب مربوط به روش ویلسون و روش تفاضل مرکزی می‌شد.

چانگ (Chang) [10] به بررسی روش ساده نیومارک پرداخت که بر اساس نتایج ارزیابی تحلیلی انجام شده بود. او اذعان داشت در حل گام به گام یک سیستم الاستیک خطی، یک گام زمانی مناسب می‌تواند بر پایه نتایج ارزیابی تحلیلی انتخاب شود؛ اگر چه هیچ راهی برای انتخاب یک گام زمانی مناسب برای انتگرالگیری دقیق یک سیستم غیر خطی وجود ندارد. او در این مطالعه بعد از معرفی درجه غیر خطی لحظه‌ای، ویژگی‌های عددی روش صریح نیومارک را به صورت تحلیلی مورد ارزیابی قرار

بالتر تغییرات شتاب در هر گام زمانی نسبت به روش‌های کلاسیک، دقت این روش نسبت به روش‌های کلاسیک بالاتر است.

محمودآبادی و همکاران [5]، روش جنینگز را با استفاده از تابع درونیابی اسپلاین درجه سه ارتقا دادند. آن‌ها به صورت مقایسه‌ای مزیت‌ها و معایب روش جنینگز را که مبتنی بر روابط دقیق و فرض تغییرات خطی تحریک بود نسبت به روش درونیابی اسپلاین ارزیابی کردند.

محمودآبادی و همکاران [6]، طیف‌های شبه‌شتاب سه شتاب‌نگاشت السترو، ناغان و طبس را که با روش درونیابی خطی تحریک (روش جنینگز) و نیز با استفاده از تابع اسپلاین مکعبی به دست آمده بودند، با یکدیگر مقایسه کردند. آن‌ها سه شتاب‌نگاشت السترو، ناغان و طبس را در نظر گرفتند و طیف پاسخ شبه‌شتاب همپایه شده (ضریب برش پایه) آن‌ها را برای مقادیر میرایی مختلف با استفاده از روش درونیابی خطی و نیز درونیابی با تابع اسپلاین محاسبه کردند. آن‌ها اذعان داشتند که مقادیر طیف شبه‌شتاب محاسبه شده با روش درونیابی اسپلاین در دوره تناوب‌های خیلی کوچک و میرایی‌های کم، اختلاف قابل ملاحظه‌ای با مقادیر متناظر طیف شبه‌شتاب محاسبه شده با روش درونیابی خطی دارد.

محمودآبادی و حسینی [7]، طیف‌های پاسخ غیر خطی شبه‌شتاب سیستم‌های الاستوپلاستیک با شکل‌پذیری ثابت را برای سه شتاب‌نگاشت که با روش درونیابی خطی تحریک شده بودند و نیز با استفاده از تابع اسپلاین مکعبی به دست آمده بودند، با یکدیگر مقایسه کردند. طیف‌های پاسخ غیر خطی برای شکل‌پذیری‌های ۱، ۱/۵، ۲، ۴ و ۸ محاسبه شدند. برای بررسی جزئی‌تر، فاصله زمانی بین نقاط شتاب‌نگاشت‌ها به ترتیب به ۲، ۵، ۱۰، ۲۰، ۵۰ و ۱۰۰ قسمت مساوی تقسیم گردیدند و شتاب‌نگاشت‌های جدیدی یک‌بار با استفاده از درونیابی خطی و یک‌بار با استفاده از درونیابی اسپلاین تولید گردید و طیف‌های پاسخ غیر خطی این دو نوع شتاب‌نگاشت با یکدیگر مقایسه شدند. نتایج کار حاکی از این موضوع بود که مقادیر بیشینه و کمینه اختلاف مقادیر قابل ملاحظه‌ای داشتند.

محمودآبادی و همکاران [8]، روش عددی شتاب مرتبه ۳ را ارائه کردند. فرض اساسی این روش این بود که تغییرات شتاب در بازه زمانی Δt به صورت یک چندجمله‌ای درجه سوم باشد

داد.

در این مقاله از قابلیت‌های نرم‌افزارهای محاسباتی مانند متلب (Matlab) استفاده شده است و به صورت کمی به مقایسه میزان دقت روش شتاب عددی درجه ۳ با روش‌های کلاسیک دیگر مانند روش شتاب متوسط نیومارک، روش شتاب خطی نیومارک، روش ویلسون-تتا و روش شتاب سهموی که در مرجع [1] ارائه گردیده، پرداخته شده است.

در مرجع [1] ساختارسازی روش شتاب سهموی ارائه گردیده است. در این روش، تغییرات شتاب در هر گام زمانی به صورت درجه ۲ در نظر گرفته شده است. در این مقاله، تغییرات شتاب در هر گام زمانی به صورت درجه ۳ در نظر گرفته شده است که این موضوع نوآوری این مقاله است. نویسندگان این مقاله بر این باورند که بسط روش شتاب مرتبه ۳ برای اولین بار است که لااقل در ایران انجام می‌شود. لازم به ذکر است در این مرجع پاسخ دقیق یک ساختمان برشی با رفتار غیر خطی تحت بارگذاری سینوسی محاسبه گردیده است و سپس پاسخ تقریبی آن با روش نیومارک و روش شتاب سهموی محاسبه گردیده است و به صورت نمودارهای تاریخچه زمانی، پاسخ طبقات اول و دوم با پاسخ دقیق آن‌ها مقایسه شده است. نقصی که به نظر می‌رسد در این مرجع وجود دارد، این است که پاسخ‌های تقریبی با پاسخ‌های دقیق متناظرشان به صورت کیفی و نموداری مقایسه شده‌اند. در این مقاله، خطاهای ۸ روش مختلف عددی، به صورت کمی (عددی) محاسبه شده و با یکدیگر مقایسه شده‌اند. در این مقاله، پاسخ جابه‌جایی یک سیستم دو درجه آزاد نرم شونده غیر خطی، تحت طیفی از بارگذاری‌های سینوسی با فرکانس‌های مختلف و دامنه نیروهای متفاوت مورد بررسی قرار گرفته است. فرکانس زاویه‌ای بارگذاری سینوسی از ۱ تا ۳۰ رادیان بر ثانیه با افزایش ۰/۱ رادیان بر ثانیه تغییر داده شد و بدین ترتیب پاسخ این سیستم تحت این ۳۰۰ بارگذاری سینوسی با ۸ روش عددی مطرح گردیده در این مقاله، محاسبه شده است. با استفاده از روش پاسخ تحلیلی و با استفاده از Δt برابر با ۰/۰۰۱ تا ۰/۰۰۳، پاسخ جابه‌جایی سیستم محاسبه و به عنوان پاسخ دقیق سیستم قلمداد گردیده است. سپس برای Δt های ۰/۰۰۱، ۰/۰۰۲، ۰/۰۰۳، ۰/۰۰۴، ۰/۰۰۵، ۰/۰۰۶ و ۰/۰۰۷ ثانیه و با استفاده از ۸ روش عددی نام برده شده در بخش چکیده، پاسخ جابه‌جایی این سیستم به ازای PGAهای ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ متر بر مجذور ثانیه

محاسبه گردید و مقادیر جذر میانگین مربعات خطا برای Δt های تعریف شده در بالا محاسبه گردید. برای مقایسه روش‌های مختلف با یکدیگر، میانگین خطاهای فرکانس‌های مختلف و نیز ضریب تغییرات آن‌ها با یکدیگر مقایسه شده و نتیجه‌گیری‌های لازم انجام شده است. علاوه بر این، روش شتاب سهموی، به روش شتاب مرتبه سوم بسط داده شده و میزان خطای این روش و نیز ضریب تغییرات آن، با روش شتاب مرتبه دوم (سهموی)، مقایسه و نتیجه‌گیری‌های لازم انجام شده است.

در ادامه در بخش ۲، روش شتاب مرتبه ۳ به تفصیل شرح داده شده است. همچنین در بخش‌های ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ مقاله، به ترتیب روش‌های شتاب مرتبه ۲، روش نیومارک (روش شتاب متوسط و شتاب خطی)، روش ویلسون، روش تفاضل مرکزی و روش جینگز و در بخش ۸، روش پاسخ تحلیلی شرح داده شده است. در بخش ۹ و ۱۰، یک سیستم دو درجه آزاد نرم شونده غیر خطی، تحت طیف وسیعی از بارگذاری‌های هارمونیک سینوسی قرار گرفته و خطاهای روش‌های مختلف با یکدیگر مقایسه شده‌اند. در بخش ۱۱ نتیجه‌گیری و در پایان در بخش ۱۲، پیشنهادات برای کارهای بعدی آمده است.

روش شتاب مرتبه ۳

معادله دیفرانسیل حرکت برای یک سازه یک درجه آزاد با رفتار خطی به صورت رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$M\ddot{y} + C\dot{y} + K_1y = P(t) \quad (1)$$

که در این رابطه M ، C و K_1 به ترتیب جرم، میرایی و سختی سازه است. $P(t)$ نیروی وارده به سازه و y ، $\dot{y}$ و $\ddot{y}$ به ترتیب جابه‌جایی، سرعت و شتاب خواهند بود. در روش پیشنهادی، تغییرات شتاب در هر گام زمانی به صورت یک چندجمله‌ای مرتبه سوم در نظر گرفته می‌شود که در نتیجه تغییرات تغییر مکان در هر گام زمانی به صورت یک تابع چندجمله‌ای کامل مرتبه پنج خواهد بود که این تابع به صورت رابطه زیر نوشته می‌شود:

$$y(t) = at^5 + bt^4 + ct^3 + dt^2 + et + f \quad (2)$$

که در این رابطه a تا f شش ضریب ثابت مجهول است که باید در هر گام زمانی محاسبه شوند.

با مشتق‌گیری از رابطه (۲) نسبت به زمان، توابع سرعت و شتاب به صورت روابط زیر به دست می‌آیند:

$$y(t) = a\Delta t^5 + b\Delta t^4 + c\Delta t^3 + d\Delta t^2 + e\Delta t + f \quad (12)$$

$$\dot{y}(t) = 5a\Delta t^4 + 4b\Delta t^3 + 3c\Delta t^2 + 2d\Delta t + e \quad (13)$$

$$\ddot{y}(t) = 20a\Delta t^3 + 12b\Delta t^2 + 6c\Delta t + 2d \quad (14)$$

این پاسخ به عنوان شرایط اولیه برای گام زمانی بعدی در نظر گرفته می‌شود و روابط فوق مجدداً برای گام بعدی استفاده می‌شود به طوری که در انتها پاسخ در لحظه مورد نظر به دست آید. حال این توابع وزنی واحد بسط داده شده، پتروگالرکین بسط داده شده و حداقل مربعات، به صورت زیر تعریف می‌شوند:

تابع وزنی واحد بسط داده شده

در این حالت با استفاده از توابع وزنی $W_1 = 1$ و $W_2 = t$ رابطه (۱۱) به صورت رابطه زیر تبدیل می‌شود:

$$\int_0^{\Delta t} (\text{residual}) dt = 0 \quad (15)$$

$$\int_0^{\Delta t} t(\text{residual}) dt = 0 \quad (16)$$

با در نظر گرفتن همزمان معادلات (۱۲) و (۱۳) و (۱۴)، مجهولات a و b و c محاسبه می‌شوند.

تابع وزنی پترو گالرکین بسط داده شده

در این روش، سه تابع وزنی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W_1 = 1, W_2 = t^2, W_3 = t^3 \quad (17)$$

بنابراین با توجه به این سه تابع وزنی، رابطه (۱۱) به روابط زیر تبدیل می‌شود:

$$\int_0^{\Delta t} t(\text{residual}) dt = 0 \quad (18)$$

$$\int_0^{\Delta t} t^2(\text{residual}) dt = 0 \quad (19)$$

$$\int_0^{\Delta t} t^3(\text{residual}) dt = 0 \quad (20)$$

در نتیجه مجهولات a و b و c با حل همزمان معادلات (۱۸) و (۱۹) و (۲۰) به دست می‌آیند.

تابع وزنی حداقل مربعات بسط داده شده

مربع تابع باقی‌مانده به صورت رابطه زیر بیان می‌شود:

$$\text{residual}^2 = \int_0^{\Delta t} [m\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + ky(t) - p(t)]^2 \quad (21)$$

$$\dot{y}(t) = 5at^4 + 4bt^3 + 3ct^2 + 2dt + e \quad (3)$$

$$\ddot{y}(t) = 20at^3 + 12bt^2 + 6ct + 2d \quad (4)$$

برای محاسبه این شش ضریب ثابت مجهول در هر گام زمانی، به شش معادله نیاز داریم. سه معادله از ارضای روابط جابه‌جایی و سرعت و شتاب در ابتدای هرگام زمانی به دست می‌آید که به صورت رابطه زیر می‌باشد:

$$y(t=0) = f = y_0, \dot{y}(t=0) = e = \dot{y}_0, \ddot{y}(t=0) = 2d = \ddot{y}_0 \quad (5)$$

از طرفی با ارضای معادله حرکت در ابتدای گام زمانی داریم:

$$M\ddot{y}_0 + C\dot{y}_0 + Ky_0 = p_0 \quad (6)$$

بنابراین با جای‌گذاری روابط (۵) در رابطه (۶) داریم:

$$M(2d) + C(e) + K(f) = p_0 \rightarrow d = \frac{p_0 - C.e - K.f}{2M} \quad (7)$$

معادله چهارم، طبق معادله (۸) از ارضای معادله حرکت در انتهای گام زمانی به دست می‌آید.

$$M.\ddot{y}_{\Delta t} + C.\dot{y}_{\Delta t} + K.y_{\Delta t} = p_{\Delta t} \quad (8)$$

$$M.(20a\Delta t^3 + 12b\Delta t^2 + 6c\Delta t + 2d) + C.(5a\Delta t^4 + 4b\Delta t^3 + 3c\Delta t^2 + 2d\Delta t + e) + K_0(a\Delta t^5 + b\Delta t^4 + c\Delta t^3 + d\Delta t^2 + e\Delta t + f) = p_{\Delta t} \quad (9)$$

همان طور که می‌دانیم در این روش عددی مانند روش‌های کلاسیک دیگر، به دلیل تقریبی بودن معادله تعادل حرکت در بازه $[0, t]$ به طور کامل ارضا نمی‌شود. در نتیجه یک تابع باقی‌مانده می‌توان تعریف کرد، به طوری که:

$$\text{residual} = P - M\ddot{y} - C\dot{y} - Ky \quad (10)$$

که برای حداقل سازی این تابع باقی‌مانده از انتگرال باقی‌مانده وزنی استفاده می‌کنیم که:

$$\int_0^{\Delta t} W_i \times (\text{residual}) dt = 0 \quad (11)$$

که در معادله (۱۱) W_i تابع وزنی است. برای یافتن ضرایب مجهول a ، b و c توابع وزنی را در ادامه به صورت زیر در نظر می‌گیریم. حال با محاسبه این شش ثابت مجهول در هر گام زمانی، پاسخ در انتهای هر گام زمانی با استفاده از روابط زیر محاسبه می‌شود:

می‌شود، اما در روش شتاب خطی، تغییرات شتاب در هر گام زمانی خطی فرض می‌شود. روش شتاب متوسط، برای هر مقدار Δt ، هر چقدر بزرگ باشد، از نظر عددی پایدار است، اما روش شتاب خطی برای $\Delta t \leq 0.551 T_n$ پایدار است. روابط و ساختارسازی این روش در مرجع [11] آمده است.

روش ویلسون

ویلسون روش شتاب خطی را که به صورت مشروط پایدار بود، اصلاح کرد و آن را با اضافه کردن پارامتری به نام θ به صورت پایدار غیر مشروط درآورد. اگر $\theta = 1$ باشد، روش ویلسون به روش شتاب خطی تبدیل می‌گردد. اگر $\theta \geq 1/37$ باشد، روش ویلسون پایدار غیر مشروط است. به استناد مرجع [11]، مقدار $\theta = 1/42$ دقت بهینه دارد. در این مقاله از مقدار بهینه θ استفاده شده است.

روش تفاضل مرکزی

این روش مبتنی بر تقریب تفاضل محدود از مشتقات زمانی جابه-جایی (یعنی سرعت و شتاب) است. این روش از روش‌های صریح و پایدار مشروط است؛ یعنی اگر $\Delta t < \frac{T_n}{\pi}$ باشد، از نظر عددی روش پایدار است. جزئیات این روش در مرجع [10] آمده است.

روش جنینگز

روش مبتنی بر روابط دقیق و فرض تغییرات خطی تحریک، روش متعارف و معمولی است که برای محاسبه پاسخ سازه‌ها در برابر زلزله در محدوده رفتار خطی از آن استفاده می‌شود. علت اصلی نام‌گذاری این روش به نام جنینگز، به مراجع [11,12] برمی‌گردد. در روش درون‌یابی خطی تحریک، نقاط شتاب‌نگاشت با پاره‌خط‌هایی به یکدیگر متصل می‌شوند. در نتیجه در محل اتصال پاره‌خط‌ها، شیب آن‌ها لزوماً با یکدیگر برابر نمی‌باشد و فقط مقادیر تابع در محل اتصال آن‌ها با یکدیگر برابر است. لازم به ذکر است روش جنینگز مبتنی بر روابط دقیق و فرض تغییرات خطی تحریک است و برای سیستم‌های یک و چند درجه آزاد دینامیکی خطی قابل استفاده است. در این مقاله که یک سیستم دو درجه آزاد نرم شونده غیر خطی مورد بررسی قرار گرفته است، فرض شده است که در هر گام زمانی، سختی سیستم ثابت است

برای حداقل‌سازی این تابع باقی‌مانده، سه معادله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{\partial(\text{residual})^2}{\partial a} = 0 \quad (22)$$

$$\frac{\partial(\text{residual})^2}{\partial b} = 0 \quad (23)$$

$$\frac{\partial(\text{residual})^2}{\partial c} = 0 \quad (24)$$

بنابراین با به‌کارگیری معادلات (۱۸) و (۱۹) و (۲۰)، در معادلات (۲۲) و (۲۳) و (۲۴)، به دست می‌آید:

$$\int_0^{\Delta t} [m\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + Ky(t) - p(t)] \left(m \frac{\partial \ddot{y}(t)}{\partial a} + C \frac{\partial \dot{y}(t)}{\partial a} + K \frac{\partial y(t)}{\partial a} \right) dt = 0 \quad (25)$$

$$\int_0^{\Delta t} [m\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + Ky(t) - p(t)] \left(m \frac{\partial \ddot{y}(t)}{\partial b} + C \frac{\partial \dot{y}(t)}{\partial b} + K \frac{\partial y(t)}{\partial b} \right) dt = 0 \quad (26)$$

$$\int_0^{\Delta t} [m\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + Ky(t) - p(t)] \left(m \frac{\partial \ddot{y}(t)}{\partial c} + C \frac{\partial \dot{y}(t)}{\partial c} + K \frac{\partial y(t)}{\partial c} \right) dt = 0 \quad (27)$$

حال با حل همزمان معادلات (۲۵) و (۲۶) و (۲۷)، مجهولات a و b و c یافت می‌شوند.

سایر روش‌های عددی

روش شتاب مرتبه ۲

در این روش شتاب در هر گام زمانی به صورت سهموی در نظر گرفته می‌شود. در نتیجه تابع تغییر مکان یک چند جمله‌ای درجه چهار بر حسب زمان است. ساختارسازی این روش کاملاً شبیه به روش شتاب مرتبه ۳ است که به لحاظ رعایت اختصار از آوردن آن صرف نظر شده است. روش شتاب مرتبه ۲ در مرجع [1] به طور کامل توضیح داده شده است.

روش نیومارک (روش شتاب متوسط و شتاب خطی)

نیومارک در سال ۱۹۵۹ دو روش معروف، موسوم به روش شتاب متوسط و روش شتاب خطی ارائه کرده است [11]. در روش شتاب متوسط، تغییرات شتاب در هر گام زمانی ثابت فرض

روش پاسخ تحلیلی

با توجه به اینکه پاسخ تحلیلی (دقیق) سیستم‌های یک درجه آزاد خطی نسبت به بارگذاری هارمونیک سینوسی در کتب دینامیک سازه‌ها موجود است [10]. لذا می‌توان در هر بازه زمانی Δt فرض کرد که سختی سیستم یک درجه آزاد مقدار ثابتی است و در این بازه زمانی از ساختارسازی موجود، استفاده کرد. در ابتدای هر بازه زمانی، سیستم دارای t_0 ای می‌باشد که مقدار آن از صفر تا $(N-1)\Delta t$ می‌تواند تغییر کند.

$$\begin{aligned} m\ddot{u} + ku &= p_0 \sin \omega(t_0 + t) \\ &= p_0[\sin \omega t_0 \times \cos \omega t + \cos \omega t_0 \times \sin \omega t] \\ &= c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t \end{aligned} \quad (32)$$

که در رابطه (۱۹) مقدار t_0 همان طوری که در بالا ذکر گردید از صفر تا $(N-1)\Delta t$ می‌تواند تغییر کند و $c_1 = p_0 \sin(\omega t_0)$ و $c_2 = p_0 \cos(\omega t_0)$ است. منظور از N ، تعداد نقاط بارگذاری سینوسی است. حل عمومی معادله دیفرانسیل (۳۲) عبارت است از:

$$u_c(t) = A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (33)$$

و حل خصوصی آن در حالتی که $\omega \neq \omega_n$ باشد (ω فرکانس بارگذاری سینوسی است) عبارت است از:

$$u_p(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t \quad (34)$$

و در حالتی که $\omega = \omega_n$ باشد (حالت تشدید) حل خصوصی معادله دیفرانسیل (۱۹) برابر است با:

$$u_p(t) = c_3 t \cos \omega_n t + c_4 t \sin \omega_n t \quad (35)$$

مقادیر ثابت A و B با اعمال شرایط اولیه در ابتدای بازه Δt محاسبه می‌شوند. همچنین، مقادیر ثابت c_1 و c_2 و c_3 و c_4 نیز با روش‌های مرسوم حل معادلات دیفرانسیل به دست می‌آیند.

مشخصات جرم و سختی سیستم دو درجه آزاد نرم شونده

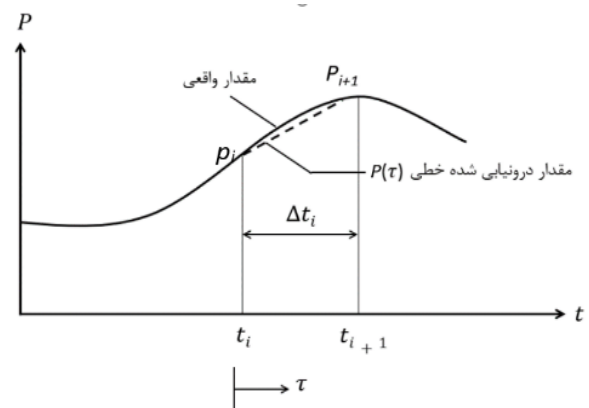
یک سیستم دو درجه آزاد نرم شونده مطابق شکل (۲) بدون میرایی با جرم ۱۰۰۰ کیلوگرم برای هر طبقه و سختی اولیه طبقه اول برابر 10^7 نیوتن بر متر و سختی اولیه طبقه دوم برابر 10^4

و بر مبنای تغییر مکان‌های این سیستم در ابتدای گام، سختی سیستم محاسبه شده است و سپس این سیستم دو درجه آزاد خطی، به دو سیستم یک درجه آزاد خطی تبدیل گردیده است. معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت سیستم یک درجه آزادی خطی جرم - فنر - میراگر عبارت است از:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = P(t) \quad (28)$$

که در این معادله u ، $\dot{u}$ و $\ddot{u}$ به ترتیب مقادیر جابه‌جایی، سرعت و شتاب جرم m می‌باشند.

روش جینگز، روشی عددی برای حل معادله دیفرانسیل (۲۸) می‌باشد. این روش مبتنی بر روابط دقیق و فرض تغییرات خطی تابع تحریک $P(t)$ است که در شکل (۱) مشخص شده است.



شکل ۱ نمادهای مورد استفاده در درون‌یابی خطی تحریک [11]

تابع تحریک $p(\tau)$ در بازه زمانی $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ را می‌توان به صورت یک تابع خطی بر حسب τ به شکل زیر بیان کرد:

$$p(\tau) = P_i + \frac{\Delta p_i}{\Delta t_i} \tau \quad (29)$$

که در آن $\Delta p_i = P_{i+1} - P_i$ است و متغیر τ از صفر تا Δt_i تغییر می‌کند. جزئیات کار در مرجع [10] توضیح داده شده است و در نهایت در این مرجع، معادلات بازگشتی زیر برای محاسبه u_{i+1} و $\dot{u}_{i+1}$ ارائه شده است:

$$u_{i+1} = Au_i + B\dot{u}_i + Cp_i + Dp_{i+1} \quad (30)$$

$$\dot{u}_{i+1} = A'u_i + B'\dot{u}_i + C'p_i + D'p_{i+1} \quad (31)$$

مقادیر هشت ضریب $A, B, C, D, \dots, D'$ که در سمت راست روابط (۳۰) و (۳۱) وجود دارند، در مرجع [10] آورده شده‌اند.

تغییرات سختی طبقات اول و دوم برحسب تغییر مکان نسبی در شکل (۳) و (۴) آورده شده است. این شکل به صورت یک سهمی درجه دو است و حدود تغییرات جابه‌جایی نسبی در طبقه اول از ۰/۰۵- تا ۰/۰۵ متر و در طبقه دوم از ۲۰- تا ۲۰ متر در نظر گرفته شده است.

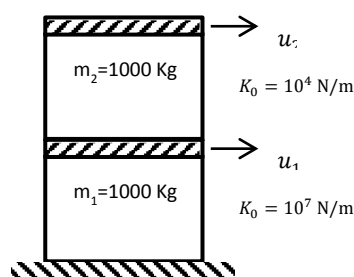
سیستم مورد بحث تحت شتاب‌نگاشت پایه $50 \sin(t)$ قرار داده شد و با دو روش پاسخ تحلیلی و نیومارک شتاب متوسط پاسخ جابه‌جایی طبقات اول و دوم آن به دست آورده شده است. نمودارهای تاریخچه زمانی مربوط در شکل (۶) آورده شده است. در مرجع [9] نمودار تاریخچه زمانی این سیستم تحت این بارگذاری مطابق شکل (۵) داده شده است. این دو نمودار با هم تطابق مناسبی دارند و بدین ترتیب صحت محاسبات اثبات می‌گردد.

نیوتن بر متر مورد بررسی قرار گرفته است. مشخصات جرم و سختی این سیستم از مرجع [10] اخذ گردیده است. همچنین، سختی‌ای که برای طبقه اول و دوم این مدل در نظر گرفته شده است، مطابق رابطه (۲۳) و (۲۴) است:

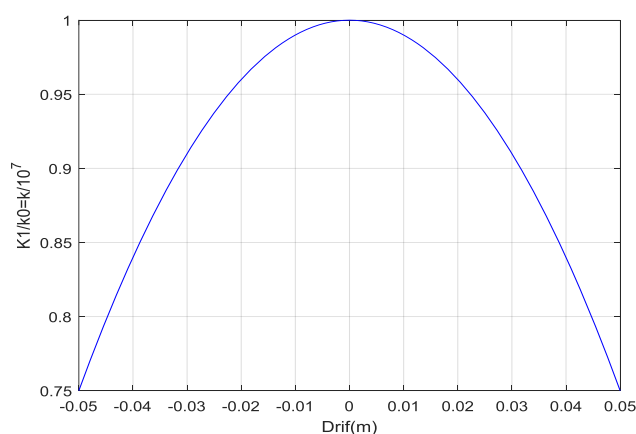
$$K_1 = K_0[1 + \alpha_1(u)^2] = 10^7[1 - 10^2(\Delta u)^2] \quad (36)$$

$$K_2 = K_0[1 + \alpha_2(u)^2] = 10^4[1 - 10^{-3}(\Delta u)^2] \quad (37)$$

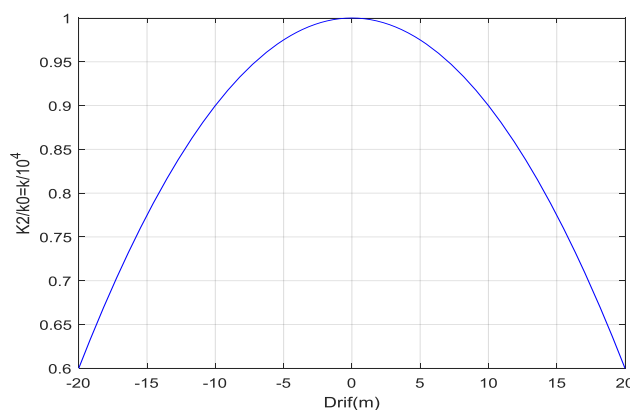
در رابطه (۳۶) و (۳۷)، Δu تغییر مکان نسبی طبقه است.



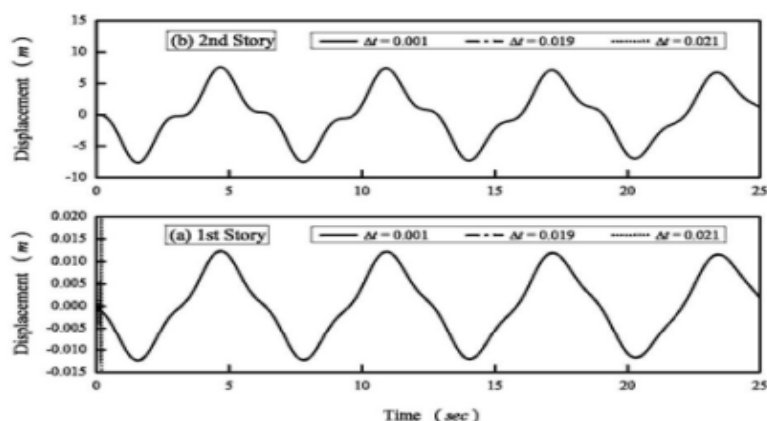
شکل ۲ مشخصات جرم و سختی اولیه سیستم دو درجه آزاد مورد بررسی



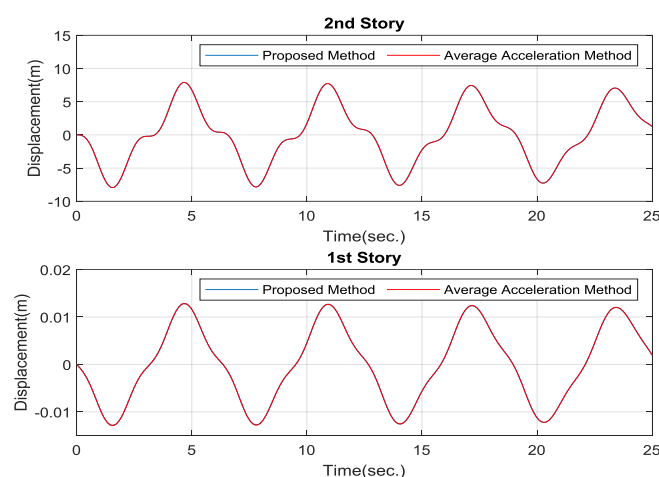
شکل ۳ تغییرات سختی طبقه اول سیستم نرم شونده بر حسب تغییر مکان نسبی آنها



شکل ۴ تغییرات سختی طبقه دوم سیستم نرم شونده بر حسب تغییر مکان نسبی آنها



شکل ۵ نمودار تاریخچه زمانی تغییر مکان طبقات اول و دوم سیستم نرم شونده با $\text{PGA} = 50 \text{ m/s}^2$ و $\Delta t = 0.001 \text{ s}$ با روش نیومارک برای فرکانس 1 rad/s [9]



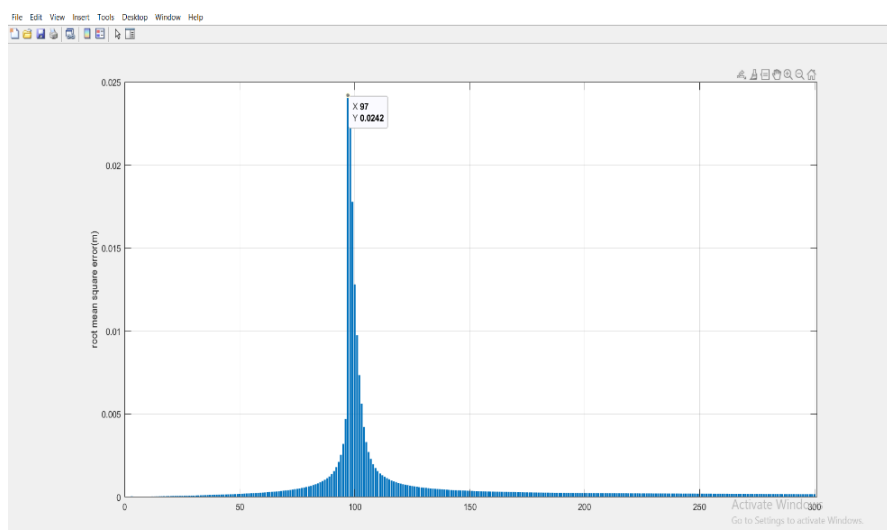
شکل ۶ نمودار تاریخچه زمانی تغییر مکان طبقات اول و دوم سیستم نرم شونده با $\text{PGA} = 50 \text{ m/s}^2$ و $\Delta t = 0.001 \text{ s}$ با دو روش پاسخ تحلیلی و نیومارک (شتاب متوسط) برای فرکانس ۱ رادیان بر ثانیه

معرفی شده در بخش‌های قبلی پاسخ جابه‌جایی این سیستم به ازای PGA های ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ متر بر مجذور ثانیه محاسبه گردید.

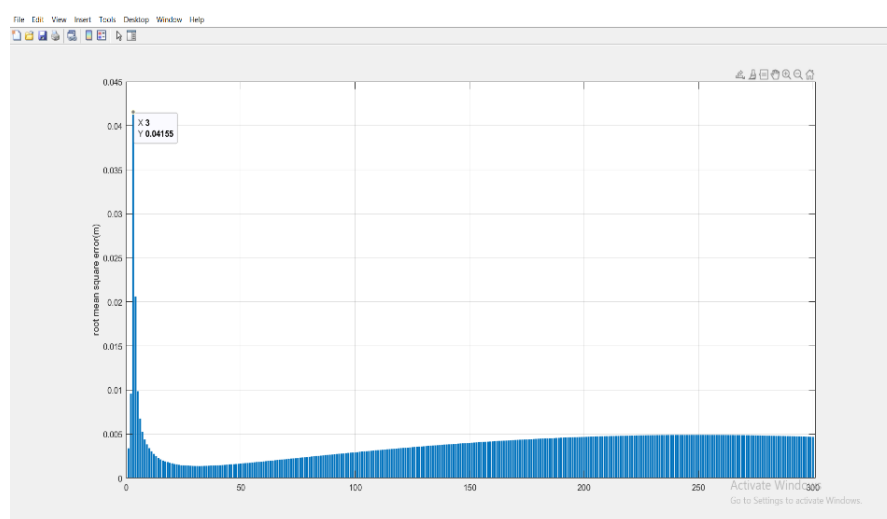
در شکل (۷) و (۸) به عنوان نمونه مقادیر جذر میانگین مربعات خطا برای طبقات اول و دوم به صورت نمودار میله‌ای از نرم‌افزار متلب برای $\text{PGA} = 5$ متر بر مجذور ثانیه و گام زمانی 0.007 ثانیه آورده شده است. همان طور که مشاهده می‌شود حداکثر خطا در طبقه اول مربوط به فرکانس بارگذاری 97 رادیان بر ثانیه است. مقدار حداکثر خطا برابر $10^{-2} \times 2/42$ متر و مقدار میانگین خطا برابر $10^{-4} \times 7/399$ متر است. در طبقه دوم حداکثر خطا مربوط به فرکانس بارگذاری 3 رادیان بر ثانیه است. مقدار حداکثر خطا برابر $10^{-2} \times 4/155$ متر و مقدار میانگین خطا برابر $10^{-3} \times 3/893$ متر است.

مقایسه کمی میزان دقت روش‌های مختلف عددی با یکدیگر

سیستم دو درجه آزاد نرم شونده غیر خطی معرفی شده در بالا تحت طیف وسیعی از بارگذاری‌های هارمونیک سینوسی قرار گرفت. فرکانس زاویه‌ای بارگذاری سینوسی از 1 تا 300 رادیان بر ثانیه با افزایش 1 رادیان بر ثانیه تغییر داده شد و بدین ترتیب پاسخ این سیستم تحت این 300 بارگذاری سینوسی با 8 روش عددی مطرح شده در بخش‌های قبلی محاسبه گردید. با استفاده از روش پاسخ تحلیلی و با استفاده از Δt برابر با 0.001 ثانیه پاسخ جابه‌جایی سیستم محاسبه گردید و به عنوان پاسخ دقیق سیستم قلمداد گردید. علت این موضوع در مرجع [9] توضیح داده شده است. سپس، برای Δt های 0.001 ، 0.002 ، 0.003 ، 0.004 ، 0.005 ، 0.006 و 0.007 ثانیه و با استفاده از 8 روش عددی



شکل ۷ مقادیر جذر میانگین مربعات خطا برای طبقه اول روش شتاب مرتبه سوم، $\Delta t = 0.007$ ثانیه و $PGA = 5 \text{ m/s}^2$



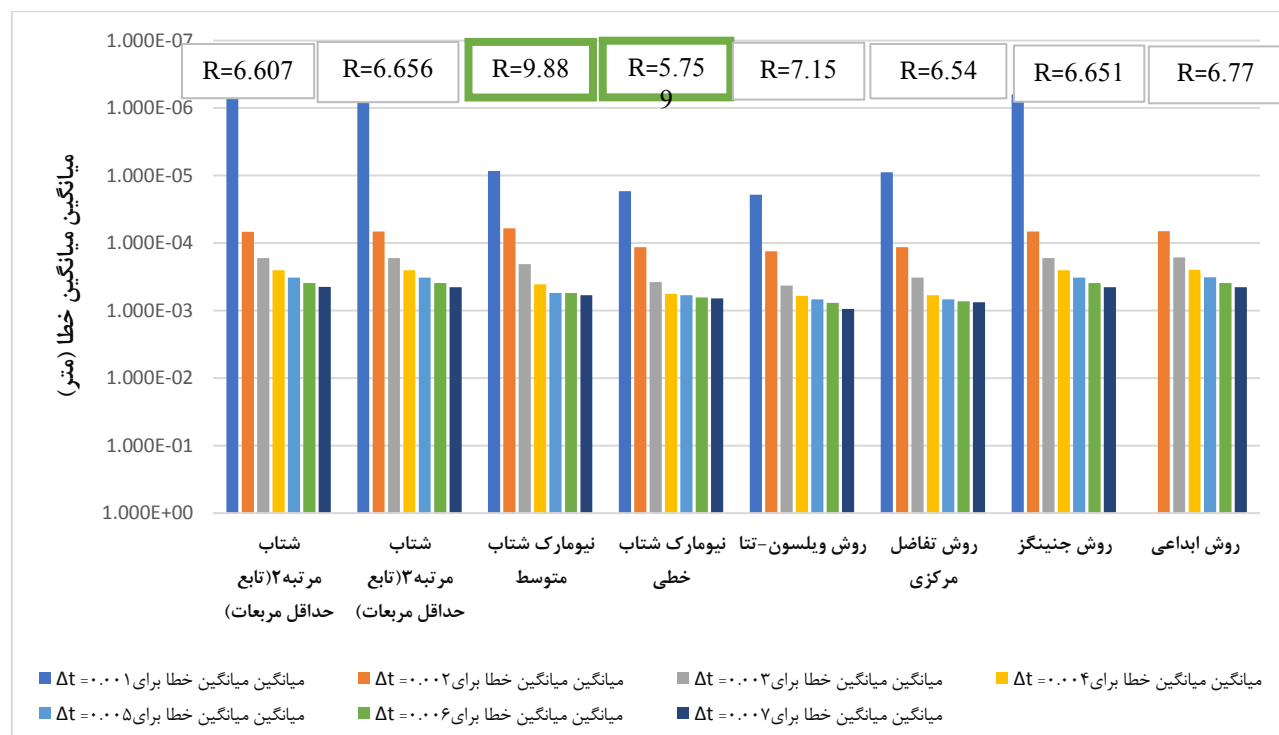
شکل ۸ مقادیر جذر میانگین مربعات خطا برای طبقه دوم روش شتاب مرتبه سوم، $\Delta t = 0.007$ ثانیه و $PGA = 5 \text{ m/s}^2$

بیانگر نسبت خطای گام زمانی 0.007 ثانیه به گام زمانی 0.002 ثانیه است. بزرگ‌ترین این نسبت‌ها برای طبقه اول، مربوط به روش نیومارک شتاب متوسط با نسبت $9/88$ است که حساسیت زیاد این روش را به گام زمانی نشان می‌دهد. کمترین نسبت‌ها مربوط به روش نیومارک شتاب خطی با نسبت $5/759$ است که حساسیت کمتر این روش را به گام زمانی نشان می‌دهد؛ و برای طبقه دوم، مربوط به روش پاسخ تحلیلی با نسبت $12/20$ است که حساسیت نسبتاً زیاد این روش را به گام زمانی نشان می‌دهد. کمترین نسبت‌ها مربوط به روش تفاضل مرکزی با نسبت $10/744$ است که حساسیت کمتر این روش را به گام زمانی نشان می‌دهد. با توجه به اینکه پاسخ جابه‌جایی روش پاسخ تحلیلی برای

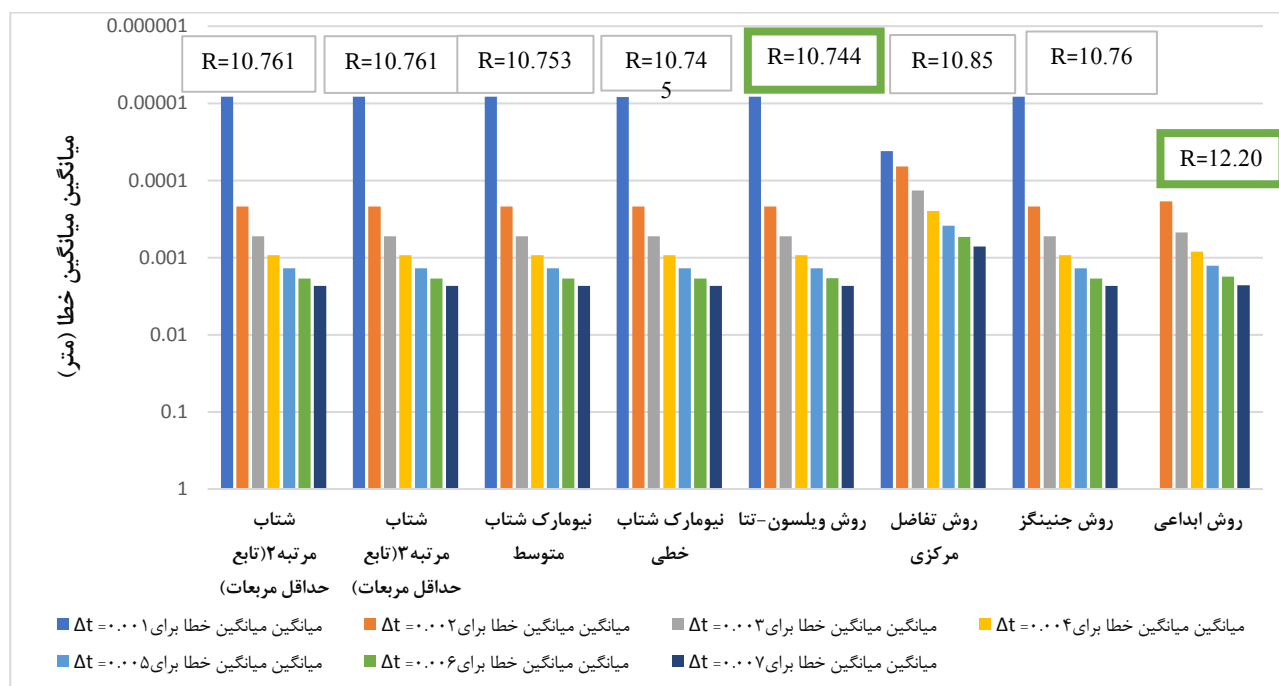
نمودار میانگین کلی سیستم دو درجه آزاد نرم شونده
در نمودارهای میله‌ای نشان داده شده در شکل (۹) و شکل (۱۰)، مقادیر میانگین میانگین خطاها بر حسب گام‌های زمانی مختلف طبقه اول و دوم، برای ۸ روش مذکور در این مقاله، آورده شده است. منظور از میانگین میانگین این است که یک بار با توجه به توضیحات بخش قبل، از مقادیر خطای به دست آمده برای ۳۰۰ فرکانس تحریک، میانگین گرفته شده است و بار دیگر از مقادیر به دست آمده، برای گام‌های زمانی 0.001 تا 0.007 ثانیه به ازای PGAهای ۱ تا ۵ متر بر مجذور ثانیه میانگین می‌گیریم که در نتیجه برای هر گام زمانی، یک میانگین به دست می‌آید. در بالای نمودار میله‌ای هر روش، عددی در کادر درج گردیده است که

روش پاسخ تحلیلی به ازای Δt برابر با $0/001$ ثانیه مقداری قید نگردیده است.

Δt برابر با $0/001$ ثانیه به عنوان پاسخ دقیق قلمداد شده است، در نمودارهای میله‌ای ارائه شده در شکل‌های (۹) و (۱۰)، برای



شکل ۹ میانگین میانگین خطاهای روش‌های مختلف عددی برای Δt برابر با $0/001$ تا $0/007$ ثانیه - طبقه اول



شکل ۱۰ میانگین میانگین خطاهای روش‌های مختلف عددی برای Δt برابر با $0/001$ تا $0/007$ ثانیه - طبقه دوم

بررسی مقادیر میانگین کلی روش‌های مختلف عددی

از مقادیر میانگین خطای به دست آمده از نرم‌افزار متلب، به ازای Δt های مختلف، میانگین گرفته شده و برای PGA های ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ متر بر مجذور ثانیه، نتایج برای طبقات اول و دوم به ترتیب و (۴) قرار داده شده است. شده و نتایج آن به ترتیب صعودی در جدول‌های (۱) و (۳) آورده شده است.

جدول ۱ میانگین خطای طبقه اول به ازای هشت روش مورد بررسی به ترتیب صعودی برای PGA های مختلف

مقادیر میانگین میانگین میانگین خطای طبقه اول								PGA (m/s ²)
روش پاسخ تحلیلی	شتاب مرتبه ۲ (تابع حداقل مربعات)	روش جینگز	شتاب مرتبه ۳ (تابع حداقل مربعات)	روش نیومارک شتاب متوسط	روش نیومارک شتاب خطی	روش تفاضل مرکزی	روش ویلسون تنا	۱
$7/329 \times 10^{-5}$	$7/361 \times 10^{-5}$	$7/376 \times 10^{-5}$	$7/379 \times 10^{-5}$	$1/403 \times 10^{-4}$	$1/737 \times 10^{-4}$	$1/804 \times 10^{-4}$	$2/119 \times 10^{-4}$	
روش پاسخ تحلیلی	شتاب مرتبه ۲ (تابع حداقل مربعات)	روش جینگز	شتاب مرتبه ۳ (تابع حداقل مربعات)	روش نیومارک شتاب متوسط	روش نیومارک شتاب خطی	روش تفاضل مرکزی	روش ویلسون تنا	۲
$1/544 \times 10^{-4}$	$1/551 \times 10^{-4}$	$1/5589 \times 10^{-4}$	$1/5593 \times 10^{-4}$	$2/438 \times 10^{-4}$	$3/133 \times 10^{-4}$	$3/284 \times 10^{-4}$	$3/752 \times 10^{-4}$	
روش پاسخ تحلیلی	شتاب مرتبه ۲ (تابع حداقل مربعات)	شتاب مرتبه ۳ (تابع حداقل مربعات)	روش جینگز	روش نیومارک شتاب متوسط	روش نیومارک شتاب خطی	روش تفاضل مرکزی	روش ویلسون تنا	۳
$2/426 \times 10^{-4}$	$2/427 \times 10^{-4}$	$2/4308 \times 10^{-4}$	$2/435 \times 10^{-4}$	$3/411 \times 10^{-4}$	$4/384 \times 10^{-4}$	$4/678 \times 10^{-4}$	$5/331 \times 10^{-4}$	
روش پاسخ تحلیلی	شتاب مرتبه ۲ (تابع حداقل مربعات)	شتاب مرتبه ۳ (تابع حداقل مربعات)	روش جینگز	روش نیومارک شتاب متوسط	روش نیومارک شتاب خطی	روش تفاضل مرکزی	روش ویلسون تنا	۴
$3/055 \times 10^{-4}$	$3/090 \times 10^{-4}$	$3/094 \times 10^{-4}$	$3/093 \times 10^{-4}$	$4/374 \times 10^{-4}$	$5/424 \times 10^{-4}$	$5/862 \times 10^{-4}$	$6/519 \times 10^{-4}$	
روش پاسخ تحلیلی	شتاب مرتبه ۲ (تابع حداقل مربعات)	شتاب مرتبه ۳ (تابع حداقل مربعات)	روش جینگز	روش نیومارک شتاب متوسط	روش نیومارک شتاب خطی	روش تفاضل مرکزی	روش ویلسون تنا	۵
$3/947 \times 10^{-4}$	$3/982 \times 10^{-4}$	$3/9872 \times 10^{-4}$	$3/986 \times 10^{-4}$	$5/290 \times 10^{-4}$	$6/549 \times 10^{-4}$	$7/224 \times 10^{-4}$	$7/859 \times 10^{-4}$	

جدول ۲ رتبه‌بندی میانگین میانگین خطای روش‌های مختلف برای طبقه اول به ترتیب صعودی، به ازای PGA های مختلف به ترتیب صعودی

مقادیر میانگین میانگین میانگین خطای طبقه اول								PGA (m/s ²)
روش پاسخ تحلیلی	شتاب مرتبه ۲ (تابع حداقل مربعات)	روش جینگز	شتاب مرتبه ۳ (تابع حداقل مربعات)	روش نیومارک شتاب متوسط	روش نیومارک شتاب خطی	روش تفاضل مرکزی	روش ویلسون تنا	۵-۱
$2/341 \times 10^{-4}$	$2/359 \times 10^{-4}$	$2/361 \times 10^{-4}$	$2/362 \times 10^{-4}$	$2/383 \times 10^{-4}$	$4/245 \times 10^{-4}$	$4/517 \times 10^{-4}$	$5/116 \times 10^{-4}$	
۱	۱/۰۰۸	۱/۰۰۹	۱/۰۰۹	۱/۴۴۵	۱/۸۱۴	۱/۹۵۲	۲/۱۸۶	

جدول ۳ میانگین خطای طبقه دوم به ازای هشت روش مورد بررسی به ترتیب صعودی برای PGAهای مختلف

مقادیر میانگین میانگین خطای طبقه دوم								PGA (m/s ²)
۱	روش تفاضل مرکزی	روش پاسخ تحلیلی	روش ویلسون	روش نیومارک شتاب خطی	روش نیومارک شتاب متوسط	شتاب مرتبه ۲ (تابع حداقل مربعات)	شتاب مرتبه ۳ (تابع حداقل مربعات)	روش جینگز
	$1/0.16 \times 10^{-1}$	$3/252 \times 10^{-1}$	$3/4535 \times 10^{-1}$	$3/454 \times 10^{-1}$	$3/456 \times 10^{-1}$	$3/458 \times 10^{-1}$	$3/458 \times 10^{-1}$	$3/459 \times 10^{-1}$
۲	روش تفاضل مرکزی	روش پاسخ تحلیلی	روش ویلسون	روش نیومارک شتاب خطی	روش نیومارک شتاب متوسط	شتاب مرتبه ۲ (تابع حداقل مربعات)	شتاب مرتبه ۳ (تابع حداقل مربعات)	روش جینگز
	$2/0.32 \times 10^{-1}$	$6/504 \times 10^{-1}$	$6/907 \times 10^{-1}$	$6/908 \times 10^{-1}$	$6/913 \times 10^{-1}$	$6/9168 \times 10^{-1}$	$6/9168 \times 10^{-1}$	$6/917 \times 10^{-1}$
۳	روش تفاضل مرکزی	روش پاسخ تحلیلی	روش ویلسون	روش نیومارک شتاب خطی	روش نیومارک شتاب متوسط	شتاب مرتبه ۳ (تابع حداقل مربعات)	شتاب مرتبه ۲ (تابع حداقل مربعات)	روش جینگز
	$3/0.48 \times 10^{-1}$	$9/756 \times 10^{-1}$	$1/0.59 \times 10^{-1}$	$1/0.362 \times 10^{-1}$	$1/0.369 \times 10^{-1}$	$1/0.37 \times 10^{-1}$	$1/0.375 \times 10^{-1}$	$1/0.375 \times 10^{-1}$
۴	روش تفاضل مرکزی	روش پاسخ تحلیلی	روش ویلسون	روش نیومارک شتاب خطی	روش نیومارک شتاب متوسط	شتاب مرتبه ۲ (تابع حداقل مربعات)	روش جینگز (تابع حداقل مربعات)	شتاب مرتبه ۳ (تابع حداقل مربعات)
	$4/0.63 \times 10^{-1}$	$1/301 \times 10^{-1}$	$1/3811 \times 10^{-1}$	$1/3816 \times 10^{-1}$	$1/3826 \times 10^{-1}$	$1/3832 \times 10^{-1}$	$1/38347 \times 10^{-1}$	$1/38349 \times 10^{-1}$
۵	روش تفاضل مرکزی	روش پاسخ تحلیلی	روش ویلسون	روش نیومارک شتاب خطی	روش نیومارک شتاب متوسط	شتاب مرتبه ۲ (تابع حداقل مربعات)	شتاب مرتبه ۳ (تابع حداقل مربعات)	روش جینگز
	$5/0.80 \times 10^{-1}$	$1/626 \times 10^{-1}$	$1/7268 \times 10^{-1}$	$1/7271 \times 10^{-1}$	$1/7282 \times 10^{-1}$	$1/7292 \times 10^{-1}$	$1/7292 \times 10^{-1}$	$1/7293 \times 10^{-1}$

جدول ۴ رتبه‌بندی میانگین خطای روش‌های مختلف برای طبقه دوم به ترتیب صعودی، به ازای PGAهای مختلف

مقادیر میانگین میانگین میانگین خطای طبقه دوم								PGA (m/s ²)
۵-۱	روش تفاضل مرکزی	روش پاسخ تحلیلی	روش ویلسون	روش نیومارک شتاب خطی	روش نیومارک شتاب متوسط	شتاب مرتبه ۲ (تابع حداقل مربعات)	شتاب مرتبه ۳ (تابع حداقل مربعات)	روش جینگز
	$3/0.48 \times 10^{-1}$	$9/756 \times 10^{-1}$	$1/0.359 \times 10^{-1}$	$1/0.362 \times 10^{-1}$	$1/0.37 \times 10^{-1}$	$1/0.374 \times 10^{-1}$	$1/0.375 \times 10^{-1}$	$1/0.376 \times 10^{-1}$
	۱	۳/۲۰۱	۳/۳۹۹	۳/۴۰۰	۳/۴۰۲	۳/۴۰۴	۳/۴۰۴	۳/۴۰۵

بررسی مقادیر ضریب تغییرات روش‌های مختلف

عددی

در نظریه آمار و احتمال، ضریب تغییرات (Coefficient of Variation) که مخفف آن (CV) است، یک معیار بدون بعد است که برای اندازه‌گیری توزیع داده‌های آماری به کار می‌رود که از تقسیم انحراف معیار بر میانگین به دست می‌آید. به عبارت دیگر ضریب تغییرات، میزان پراکندگی به ازای یک واحد از

میانگین را بیان می‌کند. معمولاً ضریب تغییرات را در عدد ۱۰۰ ضرب می‌کنند تا عدد نهایی برحسب درصد به دست بیاید. از ضریب تغییرات برای مقایسه پراکندگی دو یا چند صفت (متغیر) استفاده می‌کنند و کاربرد اصلی آن، مقایسه متغیرهایی است که واحدهای سنجش متفاوتی دارند. این شاخص تنها برای سطح سنجش نسبی کاربرد دارد.

از مقادیر ضریب تغییرات خطای به دست آمده از نرم‌افزار

متلب، به ازای Δt های مختلف، میانگین گرفته شد و برای PGA های ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ متر بر مجذور ثانیه، نتایج برای طبقات اول و دوم به ترتیب صعودی در جداول (۵) و (۷) آورده شده است.

در انتها مجدداً از این مقادیر به دست آمده، میانگین گرفته شده و نتایج آن به ترتیب صعودی در جدول‌های رتبه‌بندی (۶) و (۸) قرار داده شده است.

جدول ۵ میزان ضریب تغییرات خطا (برحسب درصد) طبقه اول به ازای هشت روش مورد بررسی به ترتیب صعودی، برای PGA های مختلف

مقادیر میانگین ضریب تغییرات خطای طبقه اول								PGA (m/s ²)
شتاب مرتبه ۳ (تابع حداقل مربعات)	روش پاسخ تحلیلی	شتاب مرتبه ۲ (تابع حداقل مربعات)	روش جینگز	روش تفاضل مرکزی	روش نیومارک شتاب خطی	روش ویلسون تتا	روش نیومارک شتاب متوسط	۱
۳۵۷/۲	۳۵۰/۶	۳۲۶/۵	۳۲۳/۹	۳۲۱/۰۲	۳۰۷/۹۷	۲۹۷/۵۴	۲۹۷/۳	
روش پاسخ تحلیلی	شتاب مرتبه ۳ (تابع حداقل مربعات)	روش جینگز	روش تفاضل مرکزی	روش نیومارک شتاب خطی	روش ویلسون تتا	روش نیومارک شتاب متوسط	شتاب مرتبه ۲ (تابع حداقل مربعات)	۲
۳۹۹/۴۸	۳۶۶/۵۵	۳۶۶/۱۷	۲۹۱/۸	۲۷۵/۳	۲۶۵/۴	۲۵۳/۲۶	۳۶۸/۶۵	
روش پاسخ تحلیلی	شتاب مرتبه ۲ (تابع حداقل مربعات)	روش جینگز	شتاب مرتبه ۳ (تابع حداقل مربعات)	روش تفاضل مرکزی	روش نیومارک شتاب خطی	روش ویلسون تتا	روش نیومارک شتاب متوسط	۳
۴۰۳/۰۱	۳۶۴/۲۴	۳۶۳/۱۸	۳۶۳/۱	۲۶۷/۰۴	۲۵۹/۸۶	۲۵۳/۴۸	۲۳۸/۷	
روش پاسخ تحلیلی	شتاب مرتبه ۲ (تابع حداقل مربعات)	روش جینگز	شتاب مرتبه ۳ (تابع حداقل مربعات)	روش تفاضل مرکزی	روش نیومارک شتاب خطی	روش نیومارک شتاب متوسط	روش ویلسون تتا	۴
۳۸۵/۳	۳۵۴/۴۴۳	۳۵۲/۹۲۵	۳۵۲/۸۵۷	۲۴۸/۵۸۶	۲۳۷/۵۹۴	۲۳۶/۹۳۵	۲۲۲/۱۵۷	
روش پاسخ تحلیلی	روش جینگز	روش نیومارک شتاب متوسط	روش تفاضل مرکزی	روش نیومارک شتاب خطی	روش ویلسون تتا	شتاب مرتبه ۳ (تابع حداقل مربعات)	شتاب مرتبه ۲ (تابع حداقل مربعات)	۵
۳۷۹/۲	۳۴۶/۵	۲۳۸/۷	۲۳۷/۹	۲۳۶/۹	۲۲۹/۱	۳۴۶/۴۲	۳۴۷/۵۱	

جدول ۶ رتبه‌بندی ضریب تغییرات خطا روش‌های مختلف برای طبقه اول به ترتیب صعودی، به ازای PGA های مختلف

مقادیر میانگین میانگین ضریب تغییرات خطای طبقه اول								PGA (m/s ²)
روش پاسخ تحلیلی	شتاب مرتبه ۳ (تابع حداقل مربعات)	شتاب مرتبه ۲ (تابع حداقل مربعات)	روش جینگز	روش تفاضل مرکزی	روش نیومارک شتاب خطی	روش ویلسون تتا	روش نیومارک شتاب متوسط	۵-۱
۳۸۳/۵۳	۳۵۷/۲۳	۳۵۲/۲۸	۳۵۰/۵۴	۲۷۳/۲۹	۲۶۳/۵۴	۲۵۴/۹۵	۲۵۲/۹۸	
۱/۵۱۶	۱/۴۱۲	۱/۳۹۲	۱/۳۸۵	۱/۰۸۰۲	۱/۰۴۱۷	۱/۰۰۷۷	۱	

جدول ۷ میزان ضریب تغییرات خطا طبقه دوم به ازای هشت روش مورد بررسی برای PGAهای مختلف به ترتیب صعودی

مقادیر میانگین ضریب تغییرات خطا طبقه دوم								PGA (m/s ²)
روش ویلسون تتا	روش نیومارک شتاب خطی	روش نیومارک شتاب متوسط	شتاب مرتبه ۲ (تابع حداقل مربعات)	شتاب مرتبه ۳ (تابع حداقل مربعات)	روش جینگز	روش پاسخ تحلیلی	روش تفاضل مرکزی	۱
۶۵/۰۶	۶۵/۰۷	۶۵/۳۱	۶۵/۵۰	۶۵/۵۰۶	۶۵/۵۰	۷۳/۰۷	۲۱۳/۷۳	
روش ویلسون تتا	روش نیومارک شتاب خطی	روش نیومارک شتاب متوسط	شتاب مرتبه ۲ (تابع حداقل مربعات)	شتاب مرتبه ۳ (تابع حداقل مربعات)	روش جینگز	روش پاسخ تحلیلی	روش تفاضل مرکزی	۲
۶۵/۰۷	۶۵/۰۷۷	۶۵/۳۱۷	۶۵/۵۱	۶۵/۵۱	۶۵/۵۱۲	۷۲/۹۱	۲۱۳/۷۶	
روش ویلسون تتا	روش نیومارک شتاب خطی	روش نیومارک شتاب متوسط	شتاب مرتبه ۲ (تابع حداقل مربعات)	شتاب مرتبه ۳ (تابع حداقل مربعات)	روش جینگز	روش پاسخ تحلیلی	روش تفاضل مرکزی	۳
۶۵/۰۷۸	۶۵/۰۸۴	۶۵/۳۲۴	۶۵/۵۰۴	۶۵/۵۱۸	۶۵/۵۱۸	۷۲/۹۲	۲۱۳/۷۸	
روش ویلسون تتا	روش نیومارک شتاب خطی	روش نیومارک شتاب متوسط	شتاب مرتبه ۳ (تابع حداقل مربعات)	شتاب مرتبه ۲ (تابع حداقل مربعات)	روش جینگز	روش پاسخ تحلیلی	روش تفاضل مرکزی	۴
۶۵/۰۸۸	۶۵/۰۹۵	۶۵/۳۲۵	۶۵/۵۲۵۷	۶۵/۵۲۹۱	۶۵/۵۲۹	۷۲/۹۳	۲۱۳/۷۸۱	
روش ویلسون تتا	روش نیومارک شتاب خطی	روش نیومارک شتاب متوسط	شتاب مرتبه ۲ (تابع حداقل مربعات)	شتاب مرتبه ۳ (تابع حداقل مربعات)	روش جینگز	روش پاسخ تحلیلی	روش تفاضل مرکزی	۵
۶۵/۱۰۴	۶۵/۱۱۱	۶۵/۳۴۹	۶۵/۵۴	۶۵/۵۴	۶۵/۵۴۳	۷۲/۹۴۶	۲۱۳/۸۱	

جدول ۸ رتبه‌بندی ضریب تغییرات خطا روش‌های مختلف برای طبقه دوم به ترتیب صعودی، به ازای PGAهای مختلف

مقادیر میانگین میانگین ضریب تغییرات خطا طبقه دوم								PGA (m/s)
روش ویلسون تتا	روش نیومارک شتاب خطی	روش نیومارک شتاب متوسط	شتاب مرتبه ۲ (تابع حداقل مربعات)	شتاب مرتبه ۳ (تابع حداقل مربعات)	روش جینگز	روش پاسخ تحلیلی	روش تفاضل مرکزی	۵-۱
۶۵/۰۸۱	۶۵/۰۸۸	۶۵/۳۲۸	۶۵/۵۱۷	۶۵/۵۲۰	۶۵/۵۲۲	۷۲/۹۵۶	۲۱۳/۷۷	
۱	۱/۰۰۱۱	۱/۰۰۳۸	۱/۰۰۶۶	۱/۰۰۶۷	۱/۰۰۶۸	۱/۱۲۱	۳/۲۸۵	

تغییرات مشاهده شده در داده‌ها است. به عبارت دیگر، ضریب تعیین نشان می‌دهد که چه مقدار از واریانس متغیر وابسته توسط متغیرهای مستقل در مدل توضیح داده شده است. مقدار R^2 بین صفر تا ۱ متغیر است. هر چه این مقدار به ۱ نزدیک‌تر باشد، مدل توانایی بهتری در توضیح تغییرات داده‌ها دارد. فرمول این شاخص به صورت زیر است:

$$R^2 = \frac{\sum(Y_t - \bar{Y})^2}{\sum(Y_t - \bar{Y})^2} \quad (24)$$

که در آن $\sum(\hat{Y}_t - \bar{Y})^2$ ، تغییرات توضیح داده شده در Y و $\sum(Y_t - \bar{Y})^2$ برابر با کل تغییرات در Y است.

در جدول (۹) و جدول (۱۰) روابط مربوط به روند افزایش خطای روش‌های مختلف بر حسب گام زمانی برای طبقه اول و دوم آورده شده است. این روابط چندجمله‌ای‌های درجه ۳ و روابط توانی هستند که چندجمله‌ای‌ها، ضریب تعیین (R^2 - squared correlation) بزرگ‌تر و روابط توانی، ضریب R^2 کوچک‌تری دارند. این مقادیر، همبستگی بسیار مناسبی با مقادیر واقعی‌شان دارند؛ به طوری که برابر یک یا بسیار نزدیک به عدد یک هستند.

ضریب تعیین یا ضریب تشخیص، یک معیار آماری است که نشان‌دهنده نسبت تغییرات توضیح داده شده توسط مدل به کل

جدول ۹ روابط مربوط به روند افزایش خطای روش‌های مختلف بر حسب گام زمانی برای طبقه اول ($x \equiv \Delta t$)

ردیف	نام روش	فرمول روند افزایش خطا	R^2
۱	روش شتاب مرتبه دوم (تابع وزنی حداقل مربعات)	$y = -7 \times 10^{-7}x^3 + 6 \times 10^{-6}x^2 + 7 \times 10^{-5}x - 8 \times 10^{-5}$	$9/982 \times 10^{-1}$
		$y = 2 \times 10^{-6}x^{3.1208}$	$8/096 \times 10^{-1}$
۲	روش شتاب مرتبه سوم (تابع حداقل مربعات)	$y = -9 \times 10^{-7}x^3 + 8 \times 10^{-6}x^2 + 6 \times 10^{-5}x - 7 \times 10^{-5}$	$9/989 \times 10^{-1}$
		$y = 2 \times 10^{-6}x^{3.1318}$	$8/126 \times 10^{-1}$
۳	روش نیومارک شتاب متوسط	$y = -7 \times 10^{-6}x^3 + 7 \times 10^{-5}x^2 - 8 \times 10^{-5}x + 2 \times 10^{-5}$	$9/852 \times 10^{-1}$
		$y = 1 \times 10^{-5}e^{0.6471x}$	$5/923 \times 10^{-1}$
۴	روش شتاب نیومارک شتاب خطی	$y = -3 \times 10^{-6}x^3 + 1 \times 10^{-5}x^2 + 0.0002x - 0.0002$	$9/747 \times 10^{-1}$
		$y = 3 \times 10^{-5}x^{1.9028}$	$7/431 \times 10^{-1}$
۵	روش ویلسون	$y = 8 \times 10^{-7}x^3 - 2 \times 10^{-5}x^2 + 0.0003x - 0.0003$	$9/823 \times 10^{-1}$
		$y = 3 \times 10^{-5}x^{1.9732}$	$8/794 \times 10^{-1}$
۶	روش تفاضل مرکزی	$y = -6 \times 10^{-6}x^3 + 6 \times 10^{-5}x^2 + 3 \times 10^{-5}x - 9 \times 10^{-5}$	$9/878 \times 10^{-1}$
		$y = 2 \times 10^{-5}x^{2.27}$	$7/544 \times 10^{-1}$
۷	روش جینگز	$y = -9 \times 10^{-7}x^3 + 8 \times 10^{-6}x^2 + 6 \times 10^{-5}x - 7 \times 10^{-5}$	$9/989 \times 10^{-1}$
		$y = 2 \times 10^{-6}x^{3.1315}$	$8/121 \times 10^{-1}$
۸	روش پاسخ تحلیلی	$y = 4 \times 10^{-7}x^3 - 1 \times 10^{-5}x^2 + 0.0001x - 0.0002$	$1/00$
		$y = 3 \times 10^{-5}x^{1.4976}$	$9/712 \times 10^{-1}$

جدول ۱۰ روابط مربوط به روند افزایش خطای روش‌های مختلف بر حسب گام زمانی برای طبقه دوم ($x \equiv \Delta t$)

ردیف	نام روش	فرمول روند افزایش خطا	R^2
۱	روش شتاب مرتبه دوم (تابع وزنی حداقل مربعات)	$y = 3 \times 10^{-5}x^3 - 3 \times 10^{-4}x^2 + 0.0013x - 0.0011$	$7/743 \times 10^{-1}$
		$y = 2 \times 10^{-5}x^{2.5496}$	$7/139 \times 10^{-1}$
۲	روش شتاب مرتبه سوم (تابع حداقل مربعات)	$y = 3 \times 10^{-5}x^3 - 3 \times 10^{-4}x^2 + 0.0013x - 0.0011$	$7/743 \times 10^{-1}$
		$y = 2 \times 10^{-5}x^{2.5496}$	$7/139 \times 10^{-1}$
۳	روش نیومارک شتاب متوسط	$y = 3 \times 10^{-5}x^3 - 3 \times 10^{-4}x^2 + 0.0013x - 0.0011$	$7/743 \times 10^{-1}$
		$y = 2 \times 10^{-5}e^{0.7134x}$	$7/125 \times 10^{-1}$
۴	روش شتاب نیومارک شتاب خطی	$y = 3 \times 10^{-5}x^3 - 3 \times 10^{-4}x^2 + 0.0013x - 0.0011$	$7/742 \times 10^{-1}$
		$y = 2 \times 10^{-5}x^{2.5473}$	$7/138 \times 10^{-1}$
۵	روش ویلسون	$y = 3 \times 10^{-5}x^3 - 3 \times 10^{-4}x^2 + 0.0013x - 0.0011$	$7/743 \times 10^{-1}$
		$y = 2 \times 10^{-5}x^{2.5482}$	$7/138 \times 10^{-1}$
۶	روش تفاضل مرکزی	$y = 9 \times 10^{-6}x^3 - 9 \times 10^{-5}x^2 + 0.0003x - 0.0002$	$7/736 \times 10^{-1}$
		$y = 3 \times 10^{-5}x^{1.3082}$	$6/913 \times 10^{-1}$
۷	روش جینگز	$y = 3 \times 10^{-5}x^3 - 3 \times 10^{-4}x^2 + 0.0013x - 0.0011$	$7/743 \times 10^{-1}$
		$y = 2 \times 10^{-5}x^{2.5496}$	$7/139 \times 10^{-1}$
۸	روش پاسخ تحلیلی	$y = 7 \times 10^{-5}x^3 - 8 \times 10^{-4}x^2 + 0.0036x - 0.0042$	$8/265 \times 10^{-1}$
		$y = 7 \times 10^{-5}x^{1.6724}$	$7/141 \times 10^{-1}$

نتیجه گیری

پاسخ جابه جایی یک سیستم دو درجه آزاد نرم شونده غیر خطی، تحت طیفی از بارگذاری های سینوسی با فرکانس های مختلف و به ازای PGA های متفاوت مورد بررسی گرفت و مقادیر میانگین خطا و ضریب تغییرات خطا برای طبقه اول و دوم و رتبه بندی آن ها در بخش ۱۰ آورده شده است.

نتایج بررسی ها نشان داد که در طبقه اول با تغییرات Δt از ۰/۰۰۱ تا ۰/۰۰۷ ثانیه در اکثر موارد حداقل مقدار میانگین خطا مربوط به روش پاسخ تحلیلی و نیومارک شتاب متوسط و حداکثر مقدار میانگین خطا در اکثر موارد مربوط به روش تفاضل مرکزی و ویلسون می باشد.

در طبقه دوم با تغییرات Δt از ۰/۰۰۱ تا ۰/۰۰۷ ثانیه در اکثر موارد حداقل مقدار میانگین خطا مربوط به روش تفاضل مرکزی و حداکثر مقدار میانگین خطا در اکثر موارد مربوط به روش جنینگز می باشد.

در مورد ضریب تغییرات، در طبقه اول با تغییرات Δt از ۰/۰۰۱ تا ۰/۰۰۷ ثانیه در اکثر موارد حداکثر مقدار ضریب تغییرات خطا مربوط به روش های شتاب مرتبه ۲ و ویلسون و حداقل مقدار ضریب تغییرات خطا در اکثر موارد مربوط به روش نیومارک شتاب خطی و روش نیومارک شتاب متوسط است.

در طبقه دوم با تغییرات Δt از ۰/۰۰۱ تا ۰/۰۰۷ ثانیه در اکثر موارد حداکثر مقدار ضریب تغییرات خطا مربوط به روش تفاضل مرکزی و حداقل مقدار ضریب تغییرات خطا در اکثر موارد مربوط به روش ویلسون است. در هر دو طبقه، میانگین و ضریب تغییرات خطا در روش شتاب مرتبه ۲ و روش شتاب مرتبه ۳ عموماً تفاوت جزئی داشتند.

در مجموع در طبقه اول روش پاسخ تحلیلی، کمترین میانگین خطا و روش ویلسون بیشترین میانگین خطا را داشت و روش های شتاب مرتبه ۲ و شتاب مرتبه ۳ در رتبه های دوم و چهارم قرار داشتند.

در طبقه دوم، روش تفاضل مرکزی، کمترین میانگین خطا و روش جنینگز بیشترین میانگین خطا را داشت و روش های شتاب مرتبه ۲ و شتاب مرتبه ۳ به ترتیب در رتبه های ششم و هفتم قرار داشتند.

از لحاظ ضریب تغییرات، در طبقه اول بیشترین مقدار ضریب تغییرات مربوط به روش پاسخ تحلیلی و کمترین مقدار آن مربوط به روش نیومارک شتاب متوسط است و روش های شتاب مرتبه ۲ و شتاب مرتبه ۳ به ترتیب در رتبه های ششم و هفتم قرار داشتند.

در طبقه دوم بیشترین مقدار ضریب تغییرات مربوط به روش تفاضل مرکزی و کمترین مقدار آن مربوط به روش ویلسون است و روش های شتاب مرتبه ۲ و شتاب مرتبه ۳ به ترتیب در رتبه های چهارم و پنجم قرار داشتند.

پیشنهادهات

موارد زیر برای ادامه مسیر این تحقیقات، پیشنهاد می شوند:

۱. بررسی اثرات مختلف پارامترها: بررسی اثر تغییر پارامترهایی مانند نوع المان یا ضریب میرایی.
۲. مطالعه درباره شرایطی که روش شتاب مرتبه ۳ در آن ها پایدار است یا ممکن است ناپایدار شود.
۳. کاربردهای خاص: می توان روش های مقایسه شده را برای کاربردهای خاصی از سیستم های غیر خطی مورد بررسی قرار داد برای مثال سیستم دینامیکی سازه ای مانند پل ها یا سیستم های مکانیکی مانند ربات ها یا قطعات متحرک پیچیده.
۴. استفاده از سیستم های با اصطکاک و میرایی.
۵. شبیه سازی با استفاده از نرم افزار ABAQUS.

سپاسگزاری

مراجع

- [1] A. A. Gholampour, M. Ghasemiye, and H. Fallahnejad, "Direct time integration method for nonlinear structural problems," in Proceeding 6th National Congress on Civil Engineering, Semnan University, Semnan, Iran, 2011.
- [2] M. Ghasemiye and M. Karimirad, "A Parabolic Acceleration Time Integration for Dynamic Problems," *Journal of Civil Engineering and Surveying*, vol. 45, pp. 35-43, 2011.

- [3] A. A. Gholampour and M. Ghassemieh, "New Practical Approach to Nonlinear Dynamic Analysis of Structures: Refinement of Newmark's and Wilson's Classical Methods," *Practice Periodical on Structural Design and Construction*, vol. 17, pp. 30-34, 2012. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)SC.1943-5576.0000101](https://doi.org/10.1061/(ASCE)SC.1943-5576.0000101)
- [4] A. A. Gholampour and M. Ghassemieh, "A weighted residual quadratic acceleration time integration method in nonlinear structural dynamics," in *Proceeding 2nd International Conference Computer Research and Development (ICAPM)*, Kuala Lumpur, Malaysia, 2010. <https://doi.org/10.1109/ICCRD.2010.123>
- [5] M. Mahmoudabadi, B. Taghavi, S. M. R. Hassani, and S. M. J. Hosseini, "Improvement of the Jennings method using spline interpolation function for numerical calculation of the response coefficient of linear single-degree-of-freedom systems," *Journal of Earthquake Science and Engineering*, vol. 10, no. 4, pp.121-133, 2023. (In Persian) <https://doi.org/10.48303/bese.2023.557640.1087>
- [6] M. Mahmoodabadi, B. Tagvi, S. M. R. Hassani, and S. M. J. Hosseini, "Comparison of pseudo-acceleration spectrum obtained from linear interpolation of excitation with pseudo-acceleration spectrum obtained from interpolation with cubic spline function," *Journal of Structural and Construction Engineering*, vol. 10, no. 12, pp. 189-209, 2023. <https://doi.org/10.22065/jsce.2023.385707.3037>
- [7] M. Mahmoudabadi and M. Hosseiny, "Comparing nonlinear response spectra of elastoplastic systems resulting from two excitation interpolation methods," *Ferdowsi Civil Engineering*, vol. 36, no. 4, 2023. <https://doi.org/10.22067/jfcei.2023.81150.1216>
- [8] M. Mahmoudabadi, A. F. Hatefi, and F. Ansari, "Quantitative comparison of the accuracy of the 3rd-order numerical acceleration method with other numerical methods," *Ferdowsi Civil Engineering*, vol. 37, no. 2, pp. 123-146, 2024. <https://doi.org/10.22067/jfcei.2024.85785.1276>
- [9] M. Mahmoudabadi, F. Ansarii, and F. Hatefi, "A quantitative analysis of the accuracy of the 3rd-order accelerating method compared to other numerical techniques for harmonical loading – a case study of a stiffening one-degree-of-freedom structure," *Journal Earthquake Science and Engineering*, vol. 12, no. 1, pp. 91-108, 2024. (In Persian) <https://doi.org/10.48303/bese.2024.2025162.1154>
- [10] S. Y. Chang, "Accurate integration of nonlinear systems using Newmark explicit method," *Journal Mechanics*, vol. 25, no. 3, pp. 289-297, 2009. <https://doi.org/10.1017/S1727719100002744>
- [11] A. Chopra, *Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*, 3rd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2017.
- [12] N. C. Nigam and P. C. Jennings, *Digital Calculation of Response Spectra from Strong-motion Records*. Pasadena, CA: California Institute of Technology, Earthquake Engineering Research Laboratory, 1968.
- [13] N. C. Nigam and P. C. Jennings, "Calculation of Response Spectra from Strong-motion Earthquake Records," *Bulletin of the Seismological Society of America*, vol. 59, no. 2, pp. 909-922, 1968. <https://doi.org/10.1785/BSSA0590020909>