

مقایسه کمی میزان دقت روش شتاب مرتبه ۳ با دیگر روش‌های عددی

چکیده

فرض اساسی روش شتاب مرتبه ۳ این است که تغییرات شتاب در بازه زمانی Δt ، به صورت یک چندجمله‌ای درجه سوم می‌باشد. برای مقایسه کمی میزان خطای این روش با دیگر روش‌های عددی، یک سیستم یک درجه آزاد خطی در نظر گرفته شد. سپس، به این سیستم بارگذاری هارمونیک سینوسی با فرکانس مشخص اعمال گردید. با استفاده از روش‌های عددی شتاب مرتبه دوم و نیز روش شتاب مرتبه سوم و روش‌های عددی دیگر و با استفاده از معیار جذر میانگین مربعات، خطاهای روش‌های مختلف به صورت کمی محاسبه شده و با یکدیگر مقایسه شدند. همچنین، چندجمله‌ای‌هایی درجه ۳ برای روند تغییرات خطا بر حسب گام زمانی و میرایی بدست آمد که همبستگی بسیار مناسبی با مقادیر واقعی آن داشت.

واژگان کلیدی: روش شتاب مرتبه ۳، تابع وزنی، انتگرال باقیمانده وزن‌دار، انتگرال‌گیری مستقیم زمانی، خطای جذر میانگین مربعات، برازش منحنی

Quantitative comparison of the accuracy of the 3rd order acceleration method with other numerical methods Abstract

The basic assumption of the 3rd order acceleration method is that the acceleration changes in the time interval Δt is in the form of a third degree polynomial. To quantitatively compare the error rate of this method with other numerical methods, a linear one-degree-of-freedom system was considered. Then, sinusoidal harmonic loading with a specific frequency was applied to this system. Using numerical methods of second-order acceleration and third-order acceleration and other numerical methods and using the root mean square criterion, the errors of different methods were quantitatively calculated and compared with each other. Also, 3rd degree polynomials were obtained for the trends of error changes in terms of time step and damping, which had a very good correlation with its real values..

Key words: 3rd order acceleration method, weighted function, weighted residual integral, direct time integration, root mean square error, curve fitting

در حالت کلی، رفتار دینامیکی سازه‌ها به دو صورت خطی و غیرخطی در نظر گرفته می‌شود که معادله دیفرانسیل حاکم بر این سیستم‌ها، یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خواهد بود بطوریکه روش‌های حل آن، به دو دسته کلی روش جمع آثار مدی و روش انتگرال‌گیری مستقیم زمانی دسته‌بندی می‌شود.

در سیستم‌های خطی، اگر پاسخ سازه در لحظه t موردنظر باشد، طبق روش انتگرال‌گیری مستقیم زمانی، ابتدا بازه $[0, t]$ به n زیر بازه تقسیم شده که معمولاً طول این زیر بازه‌ها (Δt) را با هم مساوی در نظر می‌گیرند. در هر یک از این زیر بازه‌ها $(\Delta t = \frac{t}{n})$ خواص سازه مانند سختی ثابت بوده و پاسخ در انتهای هر گام محاسبه می‌شود و سپس از این پاسخ به عنوان شرایط اولیه برای گام بعدی استفاده می‌شود.

از بین روش‌های انتگرال‌گیری زمانی مشروط پایدار، روش‌های شتاب خطی نیومارک و تفاضل مرکزی به علت دقت خوب، بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرند که در این دو روش کلاسیک مرتبه تغییرات شتاب، حداکثر بصورت خطی تغییر می‌کند. در مرجع [۱]، مرتبه تغییرات شتاب در هر گام زمانی بصورت سهموی فرض شده که در نتیجه چند جمله‌ای مرتبه چهار تابع جابجایی، دارای پنج ضریب مجهول خواهد بود. این مقاله به عنوان مرجع اصلی در نظر گرفته شد با این تفاوت که مرتبه تغییرات شتاب در هر گام زمانی بصورت درجه ۳ در نظر گرفته شد. در نتیجه، در این حالت که شتاب به صورت چندجمله‌ای مرتبه سوم در نظر گرفته شد؛ تابع جابجایی، یک تابع درجه ۵ با شش ضریب بود. با توجه به اینکه با افزایش مرتبه شتاب، تعداد جملات بیشتری در بسط سری تیلور نسبت به روش‌های کلاسیک موجود در نظر گرفته می‌شود؛ بنابراین انتظار می‌رود که در روش پیشنهادی با مرتبه شتاب درجه ۳، دقت آن نسبت به روش‌های کلاسیک دیگر بالاتر باشد. در این روش برای محاسبه انتگرال باقیمانده وزن‌دار از سه تابع وزنی؛ واحد، پترو گالرکین و حداقل مربعات استفاده شد.

در مرجع [۱] فرمولاسیون روش شتاب سهموی ارائه گردیده است. در این روش، تغییرات شتاب در هر گام زمانی به صورت درجه ۲ در نظر گرفته شده است. در این مقاله تغییرات شتاب در هر گام زمانی به صورت درجه ۳ در نظر گرفته شد که این موضوع نوآوری این مقاله می‌باشد. نویسندگان این مقاله بر این باورند که بسط روش شتاب مرتبه ۳ برای اولین بار است که لاقط در ایران انجام می‌شود. لازم به ذکر است در مرجع [۱] پاسخ دقیق یک ساختمان برشی با رفتار غیر خطی تحت بارگذاری سینوسی محاسبه گردیده است و سپس پاسخ تقریبی آن با روش نیومارک و روش شتاب سهموی محاسبه گردیده است و به صورت نمودارهای تاریخچه زمانی، پاسخ طبقات اول و دوم با پاسخ دقیق آنها مقایسه شده است. نقصی که بنظر می‌رسد در مرجع [۱] وجود دارد، این است که پاسخ‌های تقریبی با پاسخ‌های دقیق متناظرشان به صورت کیفی و نموداری مقایسه شده‌اند. در این مقاله، خطاهای ۱۲ روش مختلف عددی، به صورت کمی (عددی) برای ۳۰۰ فرکانس بارگذاری محاسبه شده و با یکدیگر مقایسه شده‌اند. به عبارت دیگر، با استفاده از پارامتر (کمیت) جذر میانگین مربعات، خطاهای روش‌های مختلف با یکدیگر به ازای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد و ده گام زمانی مقایسه شده‌اند که منجر به حجم زیادی داده گردیده است. برای مقایسه روش‌های مختلف با یکدیگر، میانگین خطاهای فرکانس‌های مختلف با یکدیگر مقایسه شده و

نتیجه‌گیری‌های لازم انجام شده است. علاوه بر این، روش شتاب سهموی، به روش شتاب مرتبه سوم بسط داده شده و میزان خطای این روش، با روش شتاب مرتبه دوم (سهموی)، مقایسه و نتیجه‌گیری‌های لازم انجام شده است.

غلامپور و همکاران [۱]، یک روش باقیمانده وزن‌دار با استفاده از چند تابع وزنی برای حل مسائل دینامیکی غیرخطی سازه‌ها ارائه نمودند. آنها مرتبه تغییرات شتاب را در هر گام زمانی بصورت سهموی فرض نمودند. در نتیجه چندجمله‌ای جابجایی مربوطه از درجه ۴ بود و لازم بود که پنج ضریب مجهول این چندجمله‌ای محاسبه گردد. آنها برای محاسبه این پنج ضریب مجهول از پنج معادله استفاده کردند. آنها سه معادله از این ۵ معادله را از ارضای معادلات جابجایی، سرعت و شتاب در ابتدای هر گام بدست آوردند و دو معادله دیگر را با محاسبه انتگرال باقیمانده وزن‌دار و با چهار تابع وزنی؛ واحد، پترو گالرکین، حداقل مربعات و کالوکیشن بدست آوردند. آنها اذعان داشتند که از روش شتاب سهموی پاسخ‌های بهتر و دقیق‌تری حاصل می‌گردد.

چانگ^۱ [۲]، به بررسی روش صریح نیومارک پرداخت که بر اساس نتایج ارزیابی تحلیلی انجام شده است. او اذعان داشت در حل گام به گام یک سیستم الاستیک خطی، یک گام زمانی مناسب می‌تواند بر پایه نتایج ارزیابی تحلیلی انتخاب شود؛ اگر چه هیچ راهی برای انتخاب یک گام زمانی مناسب برای انتگرال‌گیری دقیق یک سیستم غیر خطی وجود ندارد. او در این مطالعه بعد از معرفی درجه غیرخطی لحظه‌ای، ویژگی‌های عددی روش صریح نیومارک را به صورت تحلیلی مورد ارزیابی قرار داد. او بیان کرد که حد پایداری بالایی برای یک سیستم الاستیک خطی برابر با ۲ است، که این مقدار، اغلب در مقاومت سخت شدگی لحظه‌ای، کاهش پیدا می‌کند و در مقاومت نرم شدگی لحظه‌ای، افزایش پیدا می‌کند.

محمودآبادی و همکاران [۴]، روش جنینگز را با استفاده از تابع درونیابی اسپلاین درجه سه ارتقاء دادند. آنها به صورت مقایسه‌ای مزیت‌ها و معایب روش جنینگز که مبتنی بر روابط دقیق و فرض تغییرات خطی تحریک بود را نسبت به روش درونیابی اسپلاین ارزیابی نمودند.

محمودآبادی و حسینی [۵]، طیف‌های پاسخ غیرخطی شبه شتاب سیستم‌های الاستو پلاستیک با شکل پذیری ثابت با شتاب نگاشت الاسترو که با روش درون‌یابی خطی تحریک و نیز با استفاده از تابع اسپلاین مکعبی به دست آمده بود، با یکدیگر مقایسه کردند. طیف‌های پاسخ غیر خطی برای شکل پذیری‌های ۱، ۱/۵، ۲، ۴ و ۸ محاسبه شدند.

در ادامه در بخش ۲، روش شتاب مرتبه ۳ به تفصیل شرح داده شده است. همچنین در بخش‌های ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ مقاله به ترتیب روش‌های شتاب مرتبه ۲، روش نیومارک، (روش شتاب متوسط و شتاب خطی)، روش ویلسون، روش تفاضل مرکزی و روش جنینگز و جنینگز ارتقاء یافته شرح داده شده است. در بخش ۸، یک سیستم یک درجه آزاد خطی تحت طیفی از بارگذاری‌های سینوسی با فرکانس‌های مختلف به روش‌های فوق‌الذکر، تحلیل گردیده است و خطای روش‌های مختلف با یکدیگر مقایسه شده‌اند. در پایان و در بخش ۹، نتیجه‌گیری و پیشنهادات برای کارهای بعدی آمده است.

¹ Chang

۲- روش شتاب مرتبه ۳

معادله دیفرانسیل حرکت برای یک سازه یک درجه آزاد با رفتار خطی بصورت رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$M\ddot{y} + C\dot{y} + Ky = P(t) \quad (1)$$

که در این رابطه M ، C و K به ترتیب جرم، میرایی و سختی سازه است. $P(t)$ نیروی وارده به سازه و y ، \dot{y} و \ddot{y} به ترتیب جابجایی، سرعت و شتاب است. در روش شتاب مرتبه ۳، تغییرات شتاب در هر گام زمانی بصورت یک چند جمله‌ای مرتبه سوم در نظر گرفته می‌شود. در نتیجه، معادله تغییر مکان در هر گام زمانی بصورت یک تابع چند جمله‌ای کامل مرتبه پنج خواهد بود که این تابع به صورت رابطه زیر بیان می‌گردد:

$$y(t) = at^5 + bt^4 + ct^3 + dt^2 + et + f \quad (2)$$

که در این رابطه a تا f شش ضریب ثابت مجهول هستند که باید در هر گام زمانی محاسبه شوند.

با مشتق‌گیری از رابطه (۲) نسبت به زمان، توابع سرعت و شتاب بصورت روابط زیر بدست می‌آیند:

$$\dot{y}(t) = 5at^4 + 4bt^3 + 3ct^2 + 2dt + e \quad (3)$$

$$\ddot{y}(t) = 20at^3 + 12bt^2 + 6ct + 2d \quad (4)$$

برای محاسبه این شش ضریب ثابت مجهول در هر گام زمانی، به شش معادله نیاز داریم. سه معادله از ارضای روابط جابه‌جایی و سرعت و شتاب در ابتدای هر گام زمانی بدست می‌آید که به صورت رابطه زیر می‌باشد:

$$y(t=0) = f = y_0 \quad (5)$$

$$\dot{y}(t=0) = e = \dot{y}_0 \quad (6)$$

$$\ddot{y}(t=0) = 2d = \ddot{y}_0 \quad (7)$$

از طرفی با ارضای معادله حرکت در ابتدای گام زمانی داریم:

$$M\ddot{y}_0 + C\dot{y}_0 + Ky_0 = P_0 \quad (8)$$

بنابراین با جایگذاری روابط (۵) و (۶) و (۷) در رابطه (۸) داریم:

$$M(2d) + C(e) + K(f) = P_0 \rightarrow d = \frac{P_0 - C.e - K.f}{2M} \quad (9)$$

معادله چهارم، طبق معادله (۸) از ارضای معادله حرکت در انتهای گام زمانی بدست می‌آید.

$$M. \ddot{y}_{\Delta t} + C. \dot{y}_{\Delta t} + K. y_{\Delta t} = P_{\Delta t} \quad (10)$$

$$M. (20a\Delta t^3 + 12b\Delta t^2 + 6c\Delta t + 2d) + C. (5a\Delta t^4 + 4b\Delta t^3 + 3c\Delta t^2 + 2d\Delta t + e) + K(a\Delta t^5 + b\Delta t^4 + c\Delta t^3 + d\Delta t^2 + e\Delta t + f) = P_{\Delta t} \quad (11)$$

همانطور که می دانیم در این روش عددی مانند روش های کلاسیک دیگر، به دلیل تقریبی بودن معادله تعادل حرکت در بازه $[0, t]$ بطور کامل ارضا نمی شود؛ در نتیجه یک تابع باقیمانده می توان تعریف کرد، بطوریکه [۱]:

$$\text{remainder} = P - M \ddot{y} - C \dot{y} - Ky \quad (12)$$

که برای حداقل سازی این تابع باقیمانده از انتگرال باقیمانده وزنی استفاده می کنیم که:

$$\int_0^{\Delta t} W_i \times (\text{remainder}) dt = 0 \quad (13)$$

که در این رابطه، W_i تابع وزنی می باشد. برای یافتن ضرایب مجهول a ، b و c توابع وزنی را در ادامه به صورت زیر در نظر می گیریم. حال با محاسبه این شش ثابت مجهول در هر گام زمانی، پاسخ در انتهای هر گام زمانی با استفاده از روابط زیر محاسبه می شود:

$$y(t) = a\Delta t^5 + b\Delta t^4 + c\Delta t^3 + d\Delta t^2 + e\Delta t + f \quad (14)$$

$$\dot{y}(t) = 5a\Delta t^4 + 4b\Delta t^3 + 3c\Delta t^2 + 2d\Delta t + e \quad (15)$$

$$\ddot{y}(t) = 20a\Delta t^3 + 12b\Delta t^2 + 6c\Delta t + 2d \quad (16)$$

این پاسخ به عنوان شرایط اولیه برای گام زمانی بعدی در نظر گرفته شده و روابط فوق، مجدداً برای گام بعدی استفاده می شود؛ بطوریکه در انتها پاسخ در لحظه مورد نظر بدست آید. حال این توابع وزنی واحد بسط داده شده، پتروگالرکین بسط داده شده و حداقل مربعات بصورت زیر تعریف می شوند:

۱.۲. تابع وزنی واحد بسط داده شده

در این حالت با استفاده از توابع وزنی $W_1=1$ و $W_2=t$ رابطه (۱۳) به صورت رابطه زیر تبدیل می شود:

$$\int_0^{\Delta t} (\text{remainder}) dt = 0 \quad (17)$$

$$\int_0^{\Delta t} t(\text{remainder}) dt = 0 \quad (18)$$

حال با در نظر گرفتن همزمان معادلات (۱۱) و (۱۷) و (۱۸) مجهولات a و b و c محاسبه می شوند.

۲.۲. تابع وزنی پترو گالرکین بسط داده شده

در این روش سه تابع وزنی بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$W_1 = t \text{ و } W_2 = t^2 \text{ و } W_3 = t^3 \quad (۱۹)$$

بنابراین با توجه به این دو تابع وزنی، رابطه (۱۳) به روابط زیر تبدیل می‌شود:

$$\int_0^{\Delta t} t (\text{remainder}) dt = 0 \quad (۲۰)$$

$$\int_0^{\Delta t} t^2 (\text{remainder}) dt = 0 \quad (۲۱)$$

$$\int_0^{\Delta t} t^3 (\text{remainder}) dt = 0 \quad (۲۲)$$

در نتیجه مجهولات a و b و c با حل همزمان معادلات (۲۰) و (۲۱) و (۲۲) بدست می‌آیند.

۳.۲. تابع وزنی حداقل مربعات

مربع تابع باقیمانده بصورت رابطه زیر بیان می‌شود:

$$(\text{remainder})^2 = \int_0^{\Delta t} [m\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + ky(t) - P(t)]^2 dt \quad (۲۳)$$

برای حداقل سازی این تابع باقیمانده، سه معادله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{\partial (\text{remainder})^2}{\partial a} = 0 \quad (۲۴)$$

$$\frac{\partial (\text{remainder})^2}{\partial b} = 0 \quad (۲۵)$$

$$\frac{\partial (\text{remainder})^2}{\partial c} = 0 \quad (۲۶)$$

بنابراین با بکارگیری معادلات (۲۰)، (۲۱) و (۲۲) در معادلات (۲۴) و (۲۵) و (۲۶)، داریم:

$$\int_0^{\Delta t} [m\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + Ky(t) - P(t)] \left(m \frac{\partial \ddot{y}(t)}{\partial a} + C \frac{\partial \dot{y}(t)}{\partial a} + K \frac{\partial y(t)}{\partial a} \right) dt = 0 \quad (۲۷)$$

$$\int_0^{\Delta t} [m\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + Ky(t) - P(t)] \left(m \frac{\partial \ddot{y}(t)}{\partial b} + C \frac{\partial \dot{y}(t)}{\partial b} + K \frac{\partial y(t)}{\partial b} \right) dt = 0 \quad (۲۸)$$

$$\int_0^{\Delta t} [m\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + Ky(t) - P(t)] \left(m \frac{\partial \ddot{y}(t)}{\partial c} + C \frac{\partial \dot{y}(t)}{\partial c} + K \frac{\partial y(t)}{\partial c} \right) dt = 0 \quad (۲۹)$$

حال با حل همزمان معادلات (۲۷) و (۲۸) و (۲۹)، مجهولات a و b و c محاسبه می‌شوند.

۳- روش شتاب مرتبه ۲

در این روش شتاب در هر گام زمانی به صورت سهموی در نظر گرفته می‌شود. در نتیجه تابع تغییر مکان یک چند جمله ای درجه چهار بر حسب زمان است. روش شتاب مرتبه ۲ در مرجع [۱] به طور کامل توضیح داده شده است.

۴- روش نیومارک (روش شتاب متوسط و شتاب خطی)

نیومارک در سال ۱۹۵۹ دو روش معروف، موسوم به روش شتاب متوسط و روش شتاب خطی ارائه نموده است [۵]. در روش شتاب متوسط، تغییرات شتاب در هر گام زمانی ثابت فرض می‌شود، اما در روش شتاب خطی، تغییرات شتاب در هر گام زمانی خطی فرض می‌شود. روش شتاب متوسط، برای هر مقدار Δt ، هر چقدر بزرگ باشد، از نظر عددی پایدار است، اما روش شتاب خطی برای $\Delta t \leq 0.55 T_n$ پایدار می‌باشد. روابط و فرمولاسیون این روش در مرجع [۵] آمده است.

۵- روش ویلسون

ویلسون روش شتاب خطی که به صورت مشروط پایدار بود را اصلاح نمود و آنرا با اضافه کردن پارامتری به نام θ به صورت پایدار غیر مشروط درآورد. اگر $\theta = 1$ باشد، روش ویلسون، به روش شتاب خطی تبدیل می‌گردد. اگر $\theta \geq 1/37$ باشد، روش ویلسون پایدار غیر مشروط است. به استناد مرجع [۵] مقدار $\theta = 1/42$ دقت بهینه دارد. در این مقاله از مقدار بهینه θ استفاده شده است.

۶- روش تفاضل مرکزی

این روش مبتنی بر تقریب تفاضل محدود از مشتقات زمانی جابه‌جایی (یعنی سرعت و شتاب) است. این روش از روش‌های صریح می‌باشد و پایدار مشروط است. یعنی اگر $\Delta t < \frac{T_n}{\pi}$ باشد، از نظر عددی روش پایدار است. جزئیات این روش در مرجع [۵] آمده است.

۷- روش جنینگز و روش جنینگز ارتقاء یافته

روش مبتنی بر روابط دقیق و فرض تغییرات خطی تحریک که بعضاً در مراجع فنی فارسی از آن به روش جنینگز یاد می‌شود، روش متعارف و معمولی است که برای محاسبه پاسخ سازه‌ها در برابر زلزله در محدوده رفتار خطی از آن استفاده می‌شود. در روش درونیابی خطی تحریک، همانطوریکه از اسم آن مشخص است، نقاط شتابنگاشت با پاره‌خط‌هایی به یکدیگر متصل می‌شوند؛ در نتیجه در محل اتصال پاره‌خط‌ها، شیب آنها لزوماً با یکدیگر برابر نمی‌باشد و فقط مقادیر تابع در محل اتصال آنها با یکدیگر برابر است. با توجه به اینکه درونیابی خطی تحریک، یکی از ساده‌ترین روش‌های درونیابی است؛ در نتیجه، اگر بازه‌های زمانی بین نقاط شتابنگاشت نسبت به دوره تناوب طبیعی سازه کوچک باشد، درونیابی خطی قابل قبول بوده و دارای

دقت کافی می‌باشد. در مرجع [۵]، ذکر گردیده است که به ازای $\Delta t = \frac{T_n}{10}$ نتایج نسبتاً دقیقی به دست خواهد آمد. T_n دوره تناوب طبیعی ارتعاش سیستم یک درجه آزاد است. لازم به ذکر است روش جنینگز مبتنی بر روابط دقیق و فرض تغییرات خطی تحریک است و برای سیستم‌های یک و چند درجه آزاد دینامیکی خطی، قابل استفاده است. در این روش، تنها فرضی که برای حل معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت این سیستم‌ها استفاده می‌شود، فرض خطی بودن تحریک در فاصله Δt می‌باشد؛ به عبارت دیگر، سمت چپ معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت که به صورت معادله (۳۰) می‌باشد، بدون هیچگونه تغییری باقی می‌ماند و تنها فرض استفاده شده در این روش این است که سمت راست معادله حرکت تقریب زده می‌شود. تنها تقریب استفاده شده به این صورت است که تغییرات شتاب پایه به صورت خطی در بازه Δt در نظر گرفته می‌شود که در واقعیت مطمئناً به این صورت نیست [۵].

معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت سیستم یک درجه آزادی جرم-فنر-میراگر عبارت است از:

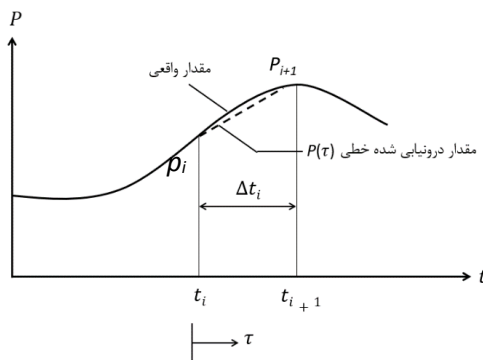
$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \quad (30)$$

که در این معادله u ، \dot{u} و \ddot{u} به ترتیب مقادیر جابجایی، سرعت و شتاب جرم m می‌باشند. در حالتی که بجای نیروی $p(t)$ سیستم یک درجه آزاد مورد بحث، تحت اثر حرکت افقی $u_g(t)$ زمین قرار گرفته باشد، در مرجع [۵] ثابت شده است که معادله (۳۰) به شکل زیر در می‌آید:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{u}_g(t) \quad (31)$$

در معادله (۳۱)، u ، \dot{u} و \ddot{u} به ترتیب مقادیر جابجایی نسبی، سرعت نسبی و شتاب نسبی جرم m نسبت به زمین (تکیه‌گاه) می‌باشند و $\ddot{u}_g(t)$ نیز شتاب حرکت زمین است. شتاب حرکت زمین که بوسیله دستگاه‌های شتابنگار اندازه‌گیری می‌شود معمولاً به صورت یک مجموعه اعداد می‌باشند که به فواصل زمانی مشخص Δt از یکدیگر قرار دارند. به عنوان مثال، فواصل زمانی بین نقاط شتابنگاشت‌های ال‌سنسترو، ناغان و طبس برابر با ۰/۰۲ ثانیه می‌باشد.

روش جنینگز، روشی عددی برای حل معادله دیفرانسیل (۳۰) یا (۳۱) می‌باشد. این روش مبتنی بر روابط دقیق و فرض تغییرات خطی تابع تحریک $p(t)$ است که در شکل (۱) مشخص شده است.



شکل ۱ - نمادهای مورد استفاده در درونیابی خطی تحریک [۵]

تابع تحریک $p(\tau)$ در بازه زمانی $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ را می‌توان به صورت یک تابع خطی بر حسب τ به شکل زیر بیان کرد:

$$p(\tau) = p_i + \frac{\Delta p_i}{\Delta t_i} \tau \quad (32)$$

که در آن $\Delta p_i = p_{i+1} - p_i$ می‌باشد و متغیر τ از صفر تا Δt_i تغییر می‌کند. پاسخ $u(\tau)$ سیستم یک درجه آزاد مورد بحث در بازه زمانی $0 \leq \tau \leq \Delta t_i$ حاصل جمع سه قسمت است: (۱) ارتعاش آزاد تحت جابجایی اولیه u_i و سرعت اولیه \dot{u}_i در $\tau = 0$ ، (۲) پاسخ به نیروی پله‌ای p_i با شرایط اولیه صفر و (۳) پاسخ به نیروی شیب‌دار $\frac{\Delta p_i}{\Delta t_i} \tau$ با شرایط اولیه صفر. با جمع پاسخ‌های سه قسمت فوق‌الذکر، پاسخ $u(\tau)$ بدست می‌آید. با جایگذاری $\tau = \Delta t_i$ در $u(\tau)$ و $\dot{u}(\tau)$ ، جابجایی u_{i+1} و سرعت \dot{u}_{i+1} که به ترتیب جابجایی و سرعت جرم m در زمان t_{i+1} هستند، بدست می‌آید. جزئیات کار در مرجع [۵] توضیح داده شده‌است و در نهایت در این مرجع، معادلات بازگشتی زیر برای محاسبه u_{i+1} و \dot{u}_{i+1} ارائه شده‌است:

$$u_{i+1} = Au_i + B\dot{u}_i + Cp_i + Dp_{i+1} \quad (33)$$

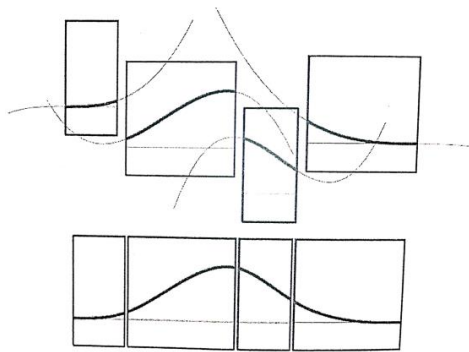
$$\dot{u}_{i+1} = A'\dot{u}_i + B'\ddot{u}_i + C'p_i + D'p_{i+1} \quad (34)$$

مقادیر هشت ضریب A, B, C, \dots, D' که در سمت راست روابط (۳۳) و (۳۴) وجود دارند، در مرجع [۵] آورده شده‌اند. این ضرایب بستگی به پارامترهای ω_n ، k و ζ ، سیستم یک درجه آزاد دارند. همچنین، آنها وابسته به بازه زمانی $\Delta t_i \equiv \Delta t$ نیز هستند. لازم به ذکر است که $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ، $\zeta = \frac{c}{2m\omega_n}$ و $\omega_D = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ می‌باشد. همچنین، در حالتی که گام زمانی $\Delta t_i \equiv \Delta t$ ثابت باشد، کافی است که هشت ضریب A, B, C, \dots, D' فقط یکبار محاسبه شوند.

هر گاه از درونیایی اسپلاین مکعبی به جای درونیایی خطی استفاده شود، در سمت راست معادله (۳۲) یک تابع تحریک درجه سه $p(t)$ در بازه زمانی $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ به شکل زیر بر حسب τ وجود دارد:

$$p(\tau) = a_i \tau^3 + b_i \tau^2 + c_i \tau + d_i \quad (35)$$

در رابطه (۳۵)، a_i ، b_i ، c_i و d_i ضرایب ثابتی هستند که چگونگی محاسبه آنها در مرجع [۳] توضیح داده شده‌است. در حقیقت در روش جنینگز ارتقاء یافته در هر گام زمانی از یک چند جمله‌ای درجه ۳ بجای درونیایی خطی استفاده می‌شود. در شکل (۲) این چند جمله‌ای‌های درجه ۳ نشان داده شده‌اند. این منحنی‌ها موسوم به منحنی‌های اسپلاین هستند. در نقاط اتصال این منحنی‌ها، علاوه بر مقدار آنها شیب و مشتق دوم این منحنی‌ها نیز با یکدیگر برابر است.



شکل ۲- مفهوم منحنی های اسپلاین

حال معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر را در نظر بگیرید:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = a_i\tau^3 + b_i\tau^2 + c_i\tau + d_i \quad t_i \leq \tau \leq t_{i+1} \quad (36)$$

این معادله با فرض اینکه میرایی سیستم زیر، مقدار بحرانی باشد، یک جواب عمومی به شکل زیر دارد:

$$u_{\text{general}}(\tau) = e^{-\zeta\omega_n\tau} [A \cos \omega_D \tau + B \sin \omega_D \tau] \quad (37)$$

در رابطه (۳۷)، A و B دو ضریب ثابت هستند. حل مکمل یا خصوصی معادله دیفرانسیل (۳۷) با توجه به اینکه سمت

راست این معادله یک تابع درجه سه بر حسب τ است را باید به صورت زیر در نظر گرفت:

$$u_p(\tau) = A'\tau^3 + B'\tau^2 + C'\tau + D' \quad (38)$$

که A' ، B' ، C' و D' چهار ضریب ثابت هستند که مقادیر آنها به شرح زیر است:

$$A' = \frac{a_i}{k} \quad (39)$$

$$B' = \frac{b_i - \frac{3ca_i}{k}}{k} \quad (40)$$

$$C' = \frac{c_i}{k} - 6\frac{ma_i}{k^2} - \frac{2c(b_i - \frac{3ca_i}{k})}{k^2} \quad (41)$$

$$D' = \frac{\left[d_i - \frac{2m(b_i - 3ca_i)}{k} \right]}{k} - \frac{c \left(c_i - \frac{6ma_i}{k} - \frac{2c(b_i - \frac{3ca_i}{k})}{k} \right)}{k^2} \quad (42)$$

با جمع جواب های عمومی و خصوصی معادلات (۳۷) و (۳۸)، جواب کل بدست می آید:

$$u_{\text{total}}(\tau) = u_{\text{general}}(\tau) + u_p(\tau) \quad (43)$$

$$u_{\text{total}}(\tau) = e^{-\zeta\omega_n\tau} [A \cos \omega_D \tau + B \sin \omega_D \tau] + A'\tau^3 + B'\tau^2 + C'\tau + D' \quad (44)$$

که ضرایب ثابت A و B با اعمال تغییر مکان و سرعت اولیه در ابتدای گام زمانی محاسبه می شوند.

۸- مقایسه کمی روش‌های مختلف عددی با یکدیگر

در این بخش برای مقایسه کمی خطاهای روش‌های مختلف، یک سیستم جرم- فنر - میراگر خطی با فرکانس ۱ هرتز در نظر گرفته شده است. پاسخ تحلیلی این سیستم در برابر بارگذاری هارمونیک سینوسی در کتب دینامیک سازه‌ها موجود می‌باشد. برای این سیستم، میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد در نظر گرفته شد. فرکانس بارگذاری هارمونیک از ۰/۱ هرتز تا ۳ هرتز با افزایش ۰/۱ در نظر گرفته شد و برای ۳۰۰ بارگذاری هارمونیک، مقدار جذر میانگین مربعات خطا برای Δt های ۰/۰۲، ۰/۰۴، ۰/۰۶، ۰/۰۸، ۰/۱۰، ۰/۱۲، ۰/۱۴، ۰/۱۶، ۰/۱۸ و ۰/۲۰ ثانیه محاسبه گردید. تعداد نقاط در نظر گرفته شده برای محاسبه معیار خطای جذر میانگین مربعات برابر با ۱۰۰۱ نقطه بود. در جدول شماره (۱) و (۲) مقادیر حداکثر خطا، حداقل خطا، میانگین خطا و انحراف معیار خطا، برای روش شتاب مرتبه سوم (روش حداقل مربعات) و روش شتاب مرتبه دوم (روش حداقل مربعات) برای $\Delta t = 0/10$ آورده شده است. با دقت در این جداول مشاهده می‌شود که مقدار میانگین خطا در روش شتاب مرتبه سوم برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب برابر با $5/298 \times 10^{-2}$ ، $4/592 \times 10^{-2}$ ، $3/780 \times 10^{-2}$ ، $3/206 \times 10^{-2}$ و $2/638 \times 10^{-2}$ می‌باشند. همچنین، مشاهده می‌شود مقدار میانگین خطا در روش شتاب مرتبه دوم برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب برابر با $6/082 \times 10^{-2}$ ، $4/936 \times 10^{-2}$ ، $3/905 \times 10^{-2}$ ، $3/266 \times 10^{-2}$ و $2/666 \times 10^{-2}$ می‌باشند. با مقایسه مقادیر میانگین خطای روش شتاب مرتبه سوم نسبت به مقادیر متناظر میانگین خطای روش شتاب مرتبه دوم، مشخص می‌گردد که برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب ۱۲/۸۹، ۶/۹۷، ۳/۲۰، ۱/۸۴ و ۱/۰۵ درصد کاهش خطا اتفاق افتاده است. مقدار میانگین کاهش خطا برای این پنج میرایی برابر با ۵/۱۹ درصد می‌باشد.

جدول (۱): مقادیر حداکثر، حداقل، میانگین و انحراف معیار جذر میانگین مربعات خطای پاسخ تغییر شکل بر حسب تغییر شکل استاتیکی برای میرایی‌های مختلف برای Δt برابر با ۰/۱۰ ثانیه - روش شتاب مرتبه سوم (روش حداقل مربعات - تابع تغییر مکان درجه ۵)

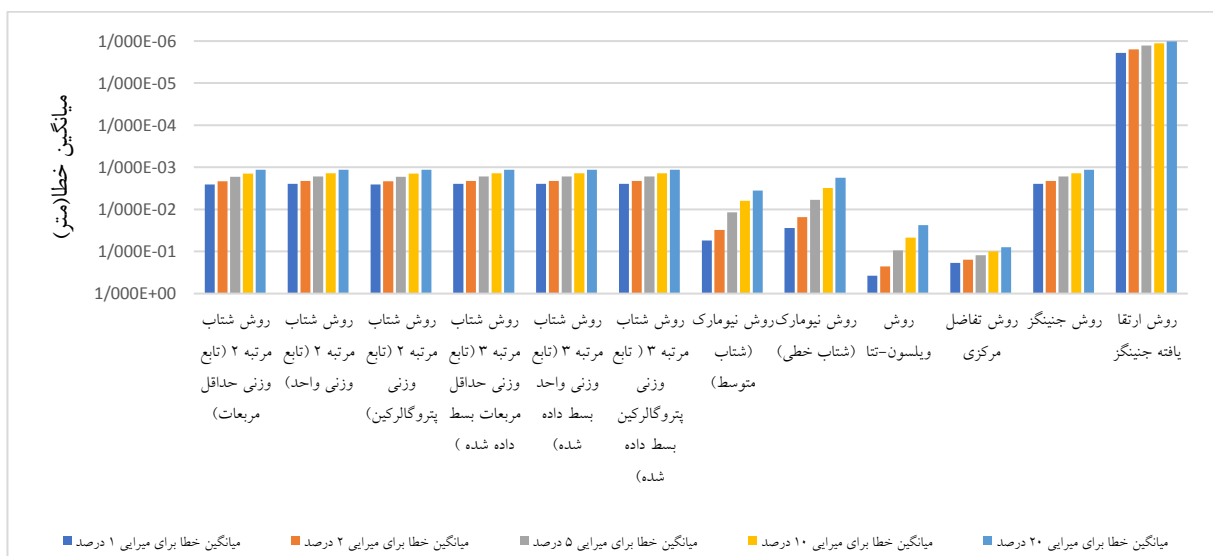
میرایی	۱ درصد	۲ درصد	۵ درصد	۱۰ درصد	۲۰ درصد
حداکثر خطا	۱/۰۰۵	$5/396 \times 10^{-1}$	$2/242 \times 10^{-1}$	$1/140 \times 10^{-1}$	$5/820 \times 10^{-2}$
بتای مربوط به حداکثر خطا	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۱	۱/۰۴
حداقل خطا	$2/348 \times 10^{-6}$	$2/342 \times 10^{-6}$	$2/341 \times 10^{-6}$	$2/341 \times 10^{-6}$	$2/341 \times 10^{-6}$
بتای مربوط به حداقل خطا	۰/۰۱	۰/۰۱	۰/۰۱	۰/۰۱	۰/۰۱
میانگین خطا	$5/298 \times 10^{-2}$	$4/592 \times 10^{-2}$	$3/780 \times 10^{-2}$	$3/206 \times 10^{-2}$	$2/638 \times 10^{-2}$
انحراف معیار خطا	$1/024 \times 10^{-1}$	$7/038 \times 10^{-2}$	$4/035 \times 10^{-2}$	$2/517 \times 10^{-2}$	$1/521 \times 10^{-2}$

جدول (۲): مقادیر حداکثر، حداقل، میانگین و انحراف معیار جذر میانگین مربعات خطای پاسخ تغییر شکل بر حسب تغییر شکل استاتیکی برای میرایی‌های مختلف برای Δt برابر با ۰/۱۰ ثانیه - روش شتاب مرتبه دوم (روش حداقل مربعات - تابع تغییر مکان درجه ۴)

میرایی	۱ درصد	۲ درصد	۵ درصد	۱۰ درصد	۲۰ درصد
حداکثر خطا	$1/706$	$7/481 \times 10^{-1}$	$2/609 \times 10^{-1}$	$1/234 \times 10^{-1}$	$6/048 \times 10^{-2}$
بتای مربوط به حداکثر خطا	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۱	۱/۰۴
حداقل خطا	$3/972 \times 10^{-5}$	$1/438 \times 10^{-5}$	$4/306 \times 10^{-6}$	$2/658 \times 10^{-6}$	$2/364 \times 10^{-6}$
بتای مربوط به حداقل خطا	۰/۰۱	۰/۰۱	۰/۰۱	۰/۰۱	۰/۰۱
میانگین خطا	$6/082 \times 10^{-2}$	$4/936 \times 10^{-2}$	$3/905 \times 10^{-2}$	$3/266 \times 10^{-2}$	$2/666 \times 10^{-2}$
انحراف معیار خطا	$1/509 \times 10^{-1}$	$8/816 \times 10^{-2}$	$4/481 \times 10^{-2}$	$2/667 \times 10^{-2}$	$1/566 \times 10^{-2}$

در شکل‌های شماره ۳ الی ۱۲ نمودار میله‌ای میانگین خطای روش‌های مختلف به ازای $\Delta t = 0/02$ ثانیه تا $\Delta t = 0/20$ ثانیه آورده شده است.

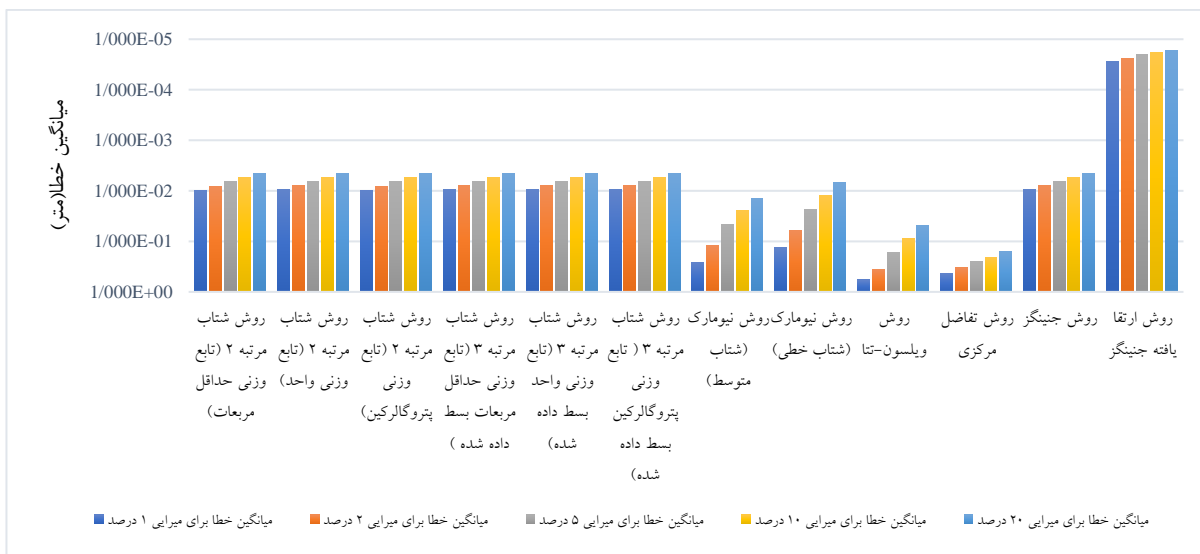
لازم به ذکر است محور قائم نمودارهای میله‌ای، لگاریتمی معکوس می‌باشند، به عبارتی دیگر میله‌ای که بیشترین ارتفاع را دارد، دارای کمترین خطا است و با توجه به اینکه جذر میانگین مربعات خطا به عنوان معیار خطا انتخاب گردیده است، در نتیجه تمام مقادیر خطا، اعدادی مثبت می‌باشند.



شکل ۳- میانگین خطای روش‌های مختلف عددی برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد برای Δt برابر با ۰/۰۲ ثانیه

با دقت در نمودارهای میله‌ای شکل (۳) و اعداد متناظر با آن که مربوط به $\Delta t=0/02$ ثانیه می‌باشد، نتایج زیر قابل مشاهده است:

- ۱- با افزایش میزان میرایی، بدون استثناء، میانگین خطای روش‌های مختلف کاهش می‌یابد.
- ۲- در روش شتاب مرتبه دوم، مقادیر میانگین خطای روش حداقل مربعات و روش پتروگالرکین تا ۴ رقم اعشار دقیقاً یکسان بودند.
- ۳- در روش شتاب مرتبه سوم، مقادیر میانگین خطای روش حداقل مربعات و روش پتروگالرکین و نیز روش تابع وزنی واحد بسط داده شده تا ۴ رقم اعشار دقیقاً یکسان بودند.
- ۴- در روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی حداقل مربعات بسط داده شده) میانگین خطای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب برابر با $2/471 \times 10^{-3}$ ، $2/091 \times 10^{-3}$ ، $1/662 \times 10^{-3}$ ، $1/391 \times 10^{-3}$ و $1/139 \times 10^{-3}$ بود. مقادیر متناظر این اعداد برای روش شتاب مرتبه دوم به ترتیب اعداد $2/543 \times 10^{-3}$ ، $2/128 \times 10^{-3}$ ، $1/676 \times 10^{-3}$ ، $1/397 \times 10^{-3}$ و $1/143 \times 10^{-3}$ بود. با مقایسه این دو سری اعداد، مشخص می‌شود که با افزایش مرتبه شتاب از ۲ به ۳ برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب $2/83$ ، $1/74$ ، $0/84$ ، $0/43$ و $0/35$ درصد معیار خطای کاهش یافته است. میانگین کاهش خطای برای تمام میرایی‌ها $1/24$ درصد می‌باشد که عدد کوچکی است.
- ۵- کمینه‌ی میانگین خطا، مربوط به روش جنینگز ارتقا یافته است که برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب مقادیر $1/895 \times 10^{-6}$ ، $1/583 \times 10^{-6}$ ، $1/288 \times 10^{-6}$ ، $1/40 \times 10^{-6}$ و $1/018 \times 10^{-6}$ مشاهده گردید. این مقادیر به مراتب کمتر از خطای روش شتاب مرتبه سوم می‌باشد. یعنی میانگین پنج عدد فوق‌الذکر ۱۲۱۸ برابر کمتر از میانگین پنج خطای مربوط به روش شتاب مرتبه سوم (روش کمترین مربعات) است.
- ۶- مقادیر خطای روش ویلسون برای میرایی ۱ و ۲ درصد به ترتیب برابر با $3/764 \times 10^{-1}$ و $2/262 \times 10^{-1}$ می‌باشد که این مقادیر بیشترین میزان خطا در هشت روش مطرح شده در این تحقیق برای میرایی ۱ و ۲ درصد است. برای میرایی‌های ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد، روش تفاضل مرکزی، بیشینه‌ی میانگین خطا را دارد که خطاهای مربوط به میرایی‌های فوق‌الذکر به ترتیب $1/227 \times 10^{-1}$ ، $1/002 \times 10^{-1}$ و $7/891 \times 10^{-2}$ می‌باشند. میانگین بیشینه‌ی خطای برای پنج میرایی فوق‌الذکر برابر با $1/809 \times 10^{-1}$ است که این میانگین 10^3 برابر میانگین خطای شتاب مرتبه سوم (روش حداقل مربعات) است.



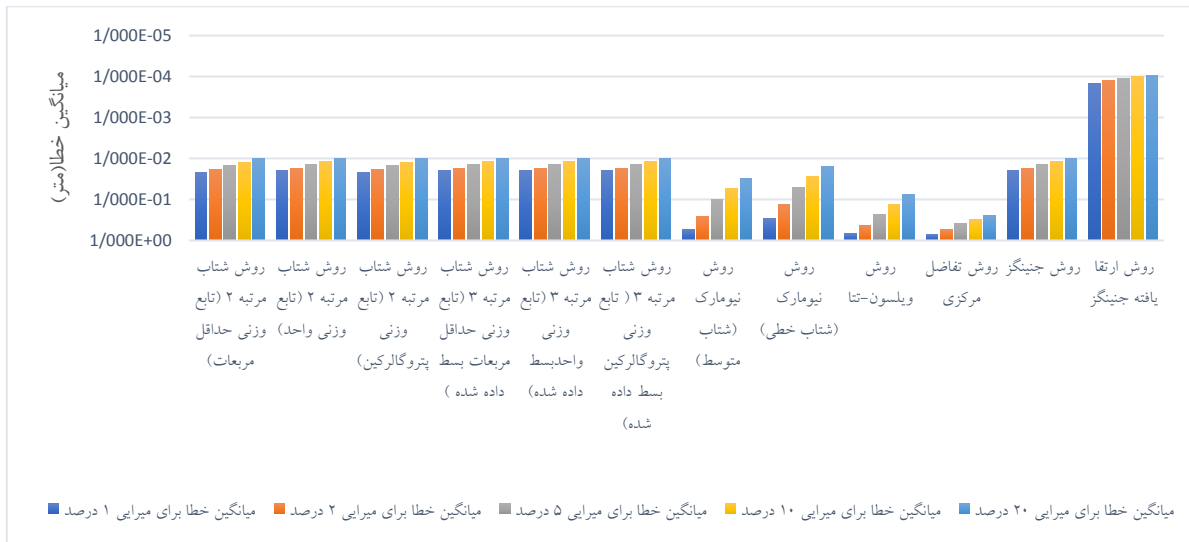
شکل ۴- میانگین خطای روش‌های مختلف عددی برای میرابی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد برای Δt برابر با ۰/۰۴ ثانیه

با دقت در نمودارهای میله‌ای شکل (۴) و اعداد متناظر با آن که مربوط به $\Delta t = 0.04$ ثانیه می‌باشد، نتایج زیر قابل مشاهده است:

- ۱- با افزایش میزان میرابی، بدون استثناء، میانگین خطای روش‌های مختلف کاهش می‌یابد.
- ۲- در روش شتاب مرتبه دوم، مقادیر میانگین خطای روش حداقل مربعات و روش پتروگالرکین تا رقم اعشار دقیقاً یکسان بودند. برای میرابی ۱۰ و ۲۰ درصد مقادیر خطای دو روش مذکور تا رقم اعشار دقیقاً یکسان بودند.
- ۳- در روش شتاب مرتبه سوم، مقادیر میانگین خطای روش حداقل مربعات و روش پتروگالرکین و نیز روش تابع وزنی واحد بسط داده شده، تا رقم اعشار دقیقاً یکسان بودند.
- ۴- در روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی حداقل مربعات بسط داده شده) میانگین خطای میرابی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب برابر با $9/281 \times 10^{-3}$ ، $7/906 \times 10^{-3}$ ، $6/423 \times 10^{-3}$ ، $5/434 \times 10^{-3}$ و $4/480 \times 10^{-3}$ بود. مقادیر متناظر این اعداد برای روش شتاب مرتبه دوم به ترتیب اعداد $9/913 \times 10^{-3}$ ، $8/186 \times 10^{-3}$ ، $6/524 \times 10^{-3}$ ، $5/483 \times 10^{-3}$ و $4/503 \times 10^{-3}$ بود. با مقایسه این دو سری اعداد، مشخص می‌شود که با افزایش مرتبه شتاب از ۲ به ۳ برای میرابی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب $2/83$ ، $1/74$ ، $0/84$ ، $0/43$ و $0/35$ درصد معیار خطا کاهش یافته است. میانگین کمینه‌ی خطا برای تمام میرابی‌ها $1/24$ درصد می‌باشد که عدد کوچکی است.

۵- کمینه‌ی میانگین خطا، مربوط به روش جنینگز ارتقا یافته است که برای میرابی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب مقادیر $2/803 \times 10^{-5}$ ، $2/387 \times 10^{-5}$ ، $2/034 \times 10^{-5}$ ، $1/848 \times 10^{-5}$ و $1/679 \times 10^{-5}$ مشاهده گردید. این مقادیر به مراتب کمتر از خطای روش شتاب مرتبه سوم می‌باشند. یعنی میانگین پنج عدد فوق‌الذکر، ۳۱۲ برابر کمتر از میانگین پنج خطای مربوط به روش شتاب مرتبه سوم (روش کمترین مربعات) است.

۶- مقادیر خطای روش ویلسون برای میرایی ۱ و ۲ درصد، به ترتیب برابر با $5/754 \times 10^{-1}$ و $3/539 \times 10^{-1}$ می باشد که این مقادیر بیشترین میزان خطا در هشت روش مطرح شده در این تحقیق برای میرایی ۱ و ۲ درصد است. برای میرایی های ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد، روش تفاضل مرکزی، بیشینه ی میانگین خطا را دارد که خطاهای مربوط به میرایی های فوق الذکر به ترتیب $2/527 \times 10^{-1}$ ، $2/042 \times 10^{-1}$ و $1/599 \times 10^{-1}$ می باشند. میانگین بیشینه ی خطا برای پنج میرایی فوق الذکر برابر با $3/09 \times 10^{-1}$ است که این میانگین ۴۶ برابر میانگین خطای شتاب مرتبه سوم (روش حداقل مربعات) است.



شکل ۵- میانگین خطای روش های مختلف عددی برای میرایی های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد برای Δt برابر با ۰/۰۶ ثانیه

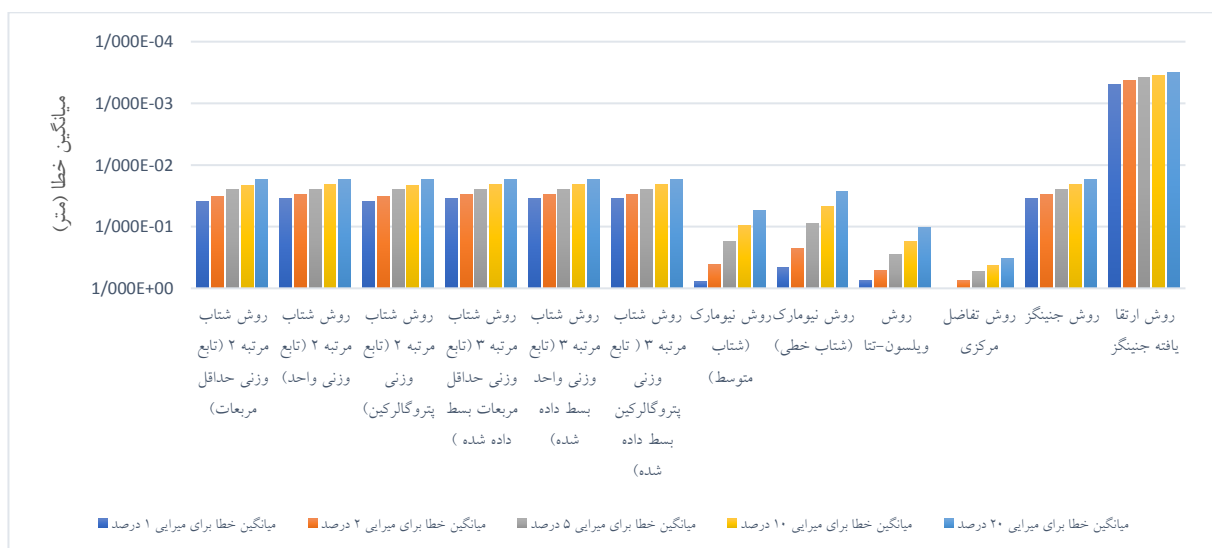
با دقت در نمودارهای میله ای شکل (۵) و اعداد متناظر با آن که مربوط به $\Delta t = 0/06$ ثانیه می باشد، نتایج زیر قابل مشاهده است:

- ۱- با افزایش میزان میرایی، بدون استثناء، میانگین خطای روش های مختلف کاهش می یابد.
- ۲- در روش شتاب مرتبه دوم، مقادیر میانگین خطای روش حداقل مربعات و روش پتروگالرکین تا رقم اعشار دقیقاً یکسان بودند.
- ۳- در روش شتاب مرتبه سوم، مقادیر میانگین خطای روش حداقل مربعات و روش پتروگالرکین و نیز روش تابع وزنی واحد بسط داده شده تا رقم اعشار دقیقاً یکسان بودند و با مقادیر میانگین خطای روش تابع وزنی واحد تا رقم اعشار دقیقاً یکسان بودند.
- ۴- در روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی حداقل مربعات بسط داده شده) میانگین خطا برای میرایی های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب برابر با $2/010 \times 10^{-2}$ ، $1/729 \times 10^{-2}$ ، $1/417 \times 10^{-2}$ ، $1/203 \times 10^{-2}$ و $9/926 \times 10^{-3}$ بود. مقادیر متناظر این اعداد برای روش شتاب مرتبه دوم به ترتیب اعداد $2/212 \times 10^{-2}$ ، $1/817 \times 10^{-2}$ ، $1/449 \times 10^{-2}$ ، $1/218 \times 10^{-2}$ و $9/998 \times 10^{-3}$ بود. با مقایسه این دو سری اعداد، مشخص می شود که با افزایش مرتبه شتاب از ۲ به ۳ برای میرایی های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به

ترتیب ۹/۱۳، ۴/۸۴، ۲/۲۱، ۰/۷۲ و ۱/۲۳ درصد معیار خطا کاهش یافته است. میانگین کاهش خطا برای تمام میرایی‌ها ۳/۶۳ درصد می‌باشد که عدد کوچکی است.

۵- کمینه‌ی میانگین خطا، مربوط به روش جنین‌گز ارتقا یافته است که برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب مقادیر $1/449 \times 10^{-4}$ ، $1/255 \times 10^{-4}$ ، $1/091 \times 10^{-4}$ ، $1/002 \times 10^{-4}$ و $9/172 \times 10^{-5}$ مشاهده گردید. این مقادیر به مراتب کمتر از خطای روش شتاب مرتبه سوم می‌باشد. یعنی میانگین پنج عدد فوق‌الذکر ۱۲۹ برابر کمتر از میانگین پنج خطای مربوط به روش شتاب مرتبه سوم (روش کمترین مربعات) است.

۶- روش تفاضل مرکزی، بیشینه میانگین خطا را در بین این هشت روش عددی داشته است که عدد مربوط به این خطاها برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ به ترتیب $7/003 \times 10^{-1}$ ، $5/270 \times 10^{-1}$ ، $3/905 \times 10^{-1}$ ، $3/124 \times 10^{-1}$ و $2/430 \times 10^{-1}$ است. میانگین بیشینه‌ی خطا برای پنج میرایی فوق‌الذکر برابر با $3/09 \times 10^{-1}$ است که این میانگین ۳۰ برابر میانگین خطای شتاب مرتبه سوم (روش حداقل مربعات) است.



شکل ۶- میانگین خطای روش‌های مختلف عددی برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد برای Δt برابر با ۰/۰۸ ثانیه

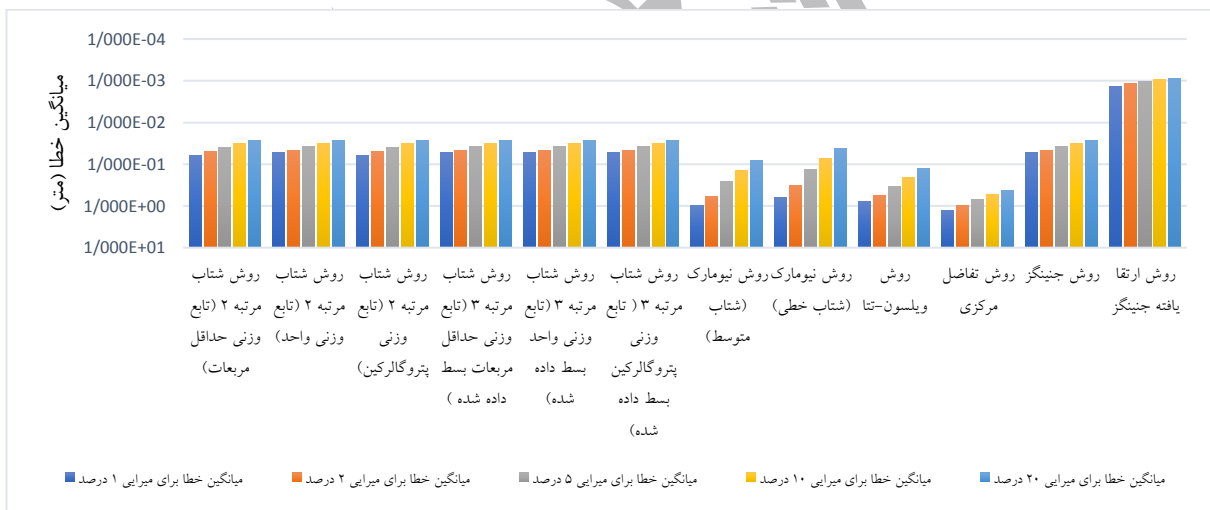
با دقت در نمودارهای میله‌ای شکل (۶) و اعداد متناظر با آن که مربوط به $\Delta t = 0/08$ ثانیه می‌باشد، نتایج زیر قابل مشاهده است:

- ۱- با افزایش میزان میرایی، بدون استثناء، میانگین خطای روش‌های مختلف کاهش می‌یابد.
- ۲- در روش شتاب مرتبه دوم، مقادیر میانگین خطای روش حداقل مربعات و روش پتروگالرکین تا رقم اعشار دقیقاً یکسان بودند.
- ۳- در روش شتاب مرتبه سوم، مقادیر میانگین خطای روش حداقل مربعات و روش پتروگالرکین و نیز روش تابع وزنی واحد بسط داده شده تا رقم اعشار دقیقاً یکسان بودند و با مقادیر میانگین خطای روش تابع وزنی واحد تا رقم اعشار دقیقاً یکسان بودند.

۴- در روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی حداقل مربعات بسط داده شده) میانگین خطا برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب برابر با $3/475 \times 10^{-2}$ ، $3/005 \times 10^{-2}$ ، $2/472 \times 10^{-2}$ ، $2/099 \times 10^{-2}$ و $1/731 \times 10^{-2}$ بود. مقادیر متناظر این اعداد برای روش شتاب مرتبه دوم به ترتیب اعداد $3/917 \times 10^{-2}$ ، $3/197 \times 10^{-2}$ ، $2/542 \times 10^{-2}$ ، $2/133 \times 10^{-2}$ و $1/747 \times 10^{-2}$ بود که با مقایسه این دو سری اعداد، مشخص می‌شود که با افزایش مرتبه شتاب از ۲ به ۳ برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب ۱۱/۲۸، ۶/۰۱، ۲/۷۵، ۰/۹۶ و ۰/۵۹ درصد معیار خطا کاهش یافته است. میانگین کاهش خطا برای تمام میرایی‌ها ۴/۵۲ درصد می‌باشد که عدد کوچکی است.

۵- کمینه‌ی میانگین خطا، مربوط به روش جنینگز ارتقا یافته است که برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب مقادیر $4/948 \times 10^{-4}$ ، $4/317 \times 10^{-4}$ ، $3/785 \times 10^{-4}$ ، $3/495 \times 10^{-4}$ و $3/218 \times 10^{-4}$ مشاهده گردید. این مقادیر به مراتب کمتر از خطای روش شتاب مرتبه سوم می‌باشد. یعنی میانگین پنج عدد فوق‌الذکر ۶۹ برابر کمتر از میانگین پنج خطای مربوط به روش شتاب مرتبه سوم (روش کمترین مربعات) است.

۶- روش تفاضل مرکزی، بیشینه میانگین خطا را در بین این هشت روش عددی داشته است که عدد مربوط به این خطاها برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ به ترتیب $9/935 \times 10^{-1}$ ، $7/398 \times 10^{-1}$ ، $5/371 \times 10^{-1}$ ، $4/256 \times 10^{-1}$ و $3/290 \times 10^{-1}$ است. میانگین بیشینه‌ی خطا برای پنج میرایی فوق‌الذکر برابر با $3/09 \times 10^{-1}$ است که این میانگین ۲۴ برابر میانگین خطای شتاب مرتبه سوم (روش حداقل مربعات) است.



شکل ۷- میانگین خطای روش‌های مختلف عددی برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد برای Δt برابر با ۰/۱ ثانیه

با دقت در نمودارهای میله‌ای شکل (۷) و اعداد متناظر با آن که مربوط به $\Delta t = 0/1$ ثانیه می‌باشد، نتایج زیر قابل مشاهده است:

۱- با افزایش میزان میرایی، بدون استثناء، میانگین خطای روش‌های مختلف کاهش می‌یابد.

۲- در روش شتاب مرتبه دوم، مقادیر میانگین خطای روش حداقل مربعات و روش پتروگالرکین تا ۳ رقم اعشار دقیقاً یکسان بودند.

۳- در روش شتاب مرتبه سوم، مقادیر میانگین خطای روش حداقل مربعات و روش پتروگالرکین و نیز روش تابع وزنی واحد بسط داده شده تا ۴ رقم اعشار دقیقاً یکسان بودند و با مقادیر میانگین خطای روش تابع وزنی واحد تا ۲ رقم اعشار دقیقاً یکسان بودند.

۴- در روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی حداقل مربعات بسط داده شده) میانگین خطا برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب برابر با $۵/۲۹۸ \times ۱۰^{-۲}$ ، $۴/۵۹۲ \times ۱۰^{-۲}$ ، $۳/۷۸۰ \times ۱۰^{-۲}$ ، $۳/۲۰۶ \times ۱۰^{-۲}$ و $۲/۶۳۸ \times ۱۰^{-۲}$ بود. مقادیر متناظر این اعداد برای روش شتاب مرتبه دوم به ترتیب اعداد $۶/۰۸۲ \times ۱۰^{-۲}$ ، $۴/۹۳۶ \times ۱۰^{-۲}$ ، $۳/۹۰۵ \times ۱۰^{-۲}$ ، $۳/۲۶۶ \times ۱۰^{-۲}$ و $۲/۶۶۶ \times ۱۰^{-۲}$ بودند که با مقایسه این دو سری اعداد مشخص می‌شود که با افزایش مرتبه شتاب از ۲ به ۳ برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ به ترتیب $۱۲/۸۹$ ، $۶/۹۷$ ، $۳/۲۰$ ، $۱/۸۴$ و $۱/۰۵$ درصد معیار خطا کاهش یافته است. میانگین کمینه‌ی خطا برای تمام میرایی‌ها $۵/۱۹$ درصد می‌باشد که عدد کوچکی است.

۵- کمینه‌ی میانگین خطا مربوط به روش جینگز ارتقا یافته است که برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ به ترتیب خطاهای $۱/۳۵۲ \times ۱۰^{-۳}$ ، $۱/۱۷۹ \times ۱۰^{-۳}$ ، $۱/۰۳۵ \times ۱۰^{-۳}$ ، $۹/۵۷۴ \times ۱۰^{-۳}$ و $۸/۸۴۶ \times ۱۰^{-۳}$ مشاهده گردید. این مقادیر به مراتب کمتر از خطای روش شتاب مرتبه سوم می‌باشد. یعنی میانگین پنج عدد فوق‌الذکر ۳۶ برابر کمتر از میانگین پنج خطای مربوط به روش شتاب مرتبه سوم (روش کمترین مربعات) است.

۶- روش تفاضل مرکزی، بیشینه‌ی میانگین خطا را در بین این هشت روش عددی داشته است که عدد مربوط به این خطاها برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ به ترتیب $۱/۲۷۹$ ، $۹/۶۶۵ \times ۱۰^{-۱}$ ، $۶/۹۳۳ \times ۱۰^{-۱}$ ، $۵/۴۴۷ \times ۱۰^{-۱}$ و $۴/۱۸۸ \times ۱۰^{-۱}$ است. میانگین بیشینه‌ی خطا، برای پنج میرایی فوق‌الذکر برابر با $۷/۸۰۴ \times ۱۰^{-۱}$ است که این میانگین ۲۰ برابر میانگین خطای شتاب مرتبه سوم (روش حداقل مربعات) است.

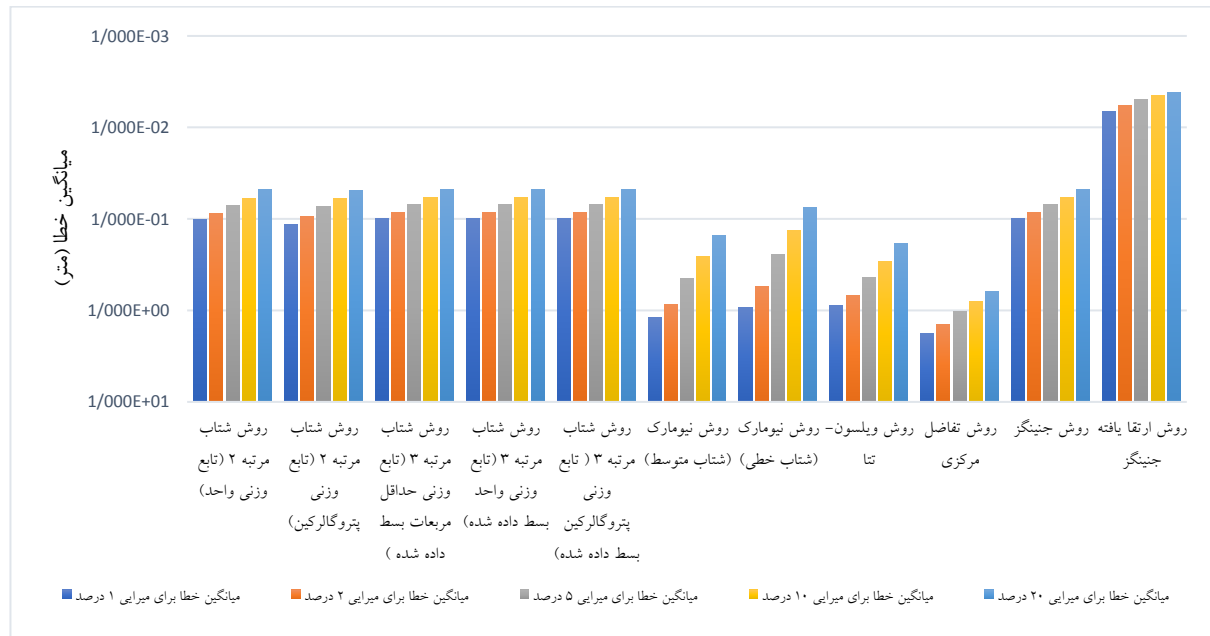


شکل ۸- میانگین خطای روش‌های مختلف عددی برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد برای Δt برابر با ۰/۱۲ ثانیه

با دقت در نمودارهای میله‌ای شکل (۸) و اعداد متناظر با آن که مربوط به $\Delta t = 0/12$ ثانیه می‌باشد، نتایج زیر قابل مشاهده است:

- ۱- با افزایش میزان میرایی، بدون استثناء، میانگین خطای روش‌های مختلف کاهش می‌یابد.
- ۲- در روش شتاب مرتبه دوم، مقادیر میانگین خطای روش حداقل مربعات و روش پتروگالرکین تا ۲ رقم اعشار دقیقاً یکسان بودند.
- ۳- در روش شتاب مرتبه سوم، مقادیر میانگین خطای روش حداقل مربعات و روش پتروگالرکین بسط داده شده تا ۴ رقم اعشار دقیقاً یکسان بودند و با مقادیر میانگین خطای روش تابع وزنی واحد تا ۲ رقم اعشار دقیقاً یکسان بودند.
- ۴- در روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی حداقل مربعات بسط داده شده) میانگین خطای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب برابر با $7/445 \times 10^{-2}$ ، $6/453 \times 10^{-2}$ ، $5/302 \times 10^{-2}$ ، $4/485 \times 10^{-2}$ و $3/676 \times 10^{-2}$ مقادیر متناظر این اعداد برای روش شتاب مرتبه دوم به ترتیب اعداد $8/665 \times 10^{-2}$ ، $6/994 \times 10^{-2}$ ، $5/500 \times 10^{-2}$ ، $4/579 \times 10^{-2}$ و $3/720 \times 10^{-2}$ بودند که با مقایسه این دو سری اعداد مشخص می‌شود که با افزایش مرتبه شتاب از ۲ به ۳ برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ به ترتیب ۱۴/۰۸، ۷/۷۳، ۳/۶۰، ۲/۰۵ و ۱/۱۸ درصد، معیار خطا کاهش یافته است. کمینه‌ی میانگین خطا برای تمام میرایی‌ها ۵/۷۳ درصد می‌باشد که عدد کوچکی است.
- ۵- کمینه‌ی میانگین خطا مربوط به روش جینگز ارتقا یافته است که برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ به ترتیب خطاهای $3/207 \times 10^{-3}$ ، $2/773 \times 10^{-3}$ ، $2/416 \times 10^{-3}$ ، $2/232 \times 10^{-3}$ و $2/067 \times 10^{-3}$ مشاهده گردید. این مقادیر به مراتب کمتر از خطای روش شتاب مرتبه سوم می‌باشد. یعنی میانگین پنج عدد فوق‌الذکر ۲۲ برابر کمتر از میانگین پنج خطای مربوط به روش شتاب مرتبه سوم (روش کمترین مربعات) است.

۶- روش تفاضل مرکزی، بی‌شینه میانگین خطا را در بین این هشت روش عددی داشته است که عدد مربوط به این خطاها برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ به ترتیب $۱/۵۳۹$ ، $۱/۱۹۹$ ، $۸/۵۹۵ \times 10^{-1}$ ، $۶/۷۰۸ \times 10^{-1}$ و $۵/۱۳۵ \times 10^{-1}$ است. میانگین بی‌شینه‌ی خطا برای پنج میرایی فوق‌الذکر برابر با $۹/۵۶۳ \times 10^{-1}$ است که این میانگین ۱۷ برابر میانگین خطای شتاب مرتبه سوم (روش حداقل مربعات) است.



شکل ۹- میانگین خطای روش‌های مختلف عددی برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد برای Δt برابر با ۰/۱۴ ثانیه

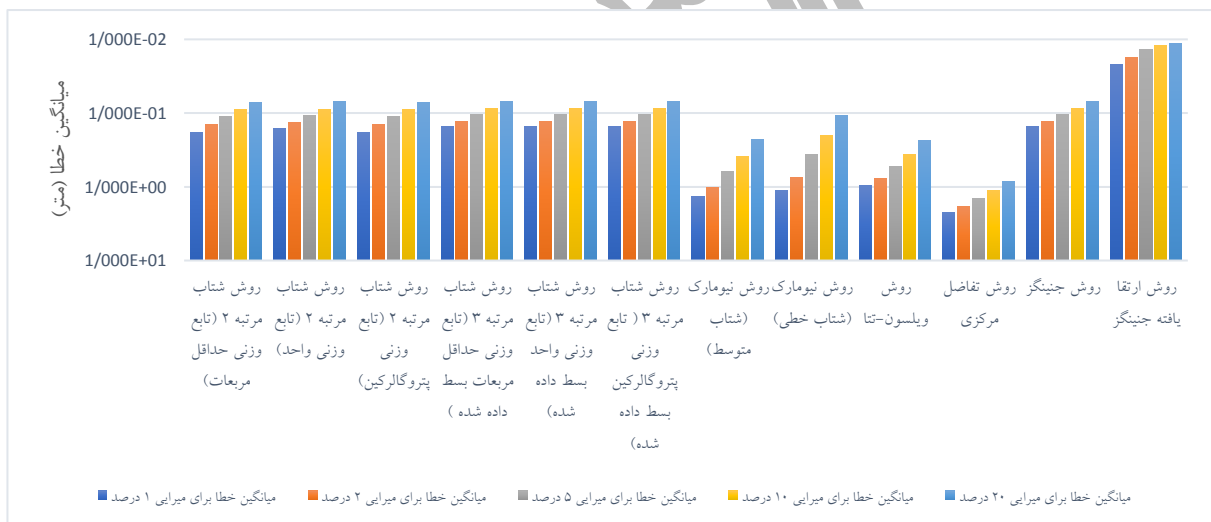
با دقت در نمودارهای میله‌ای شکل (۹) و اعداد متناظر با آن که مربوط به $\Delta t = 0/14$ ثانیه می‌باشد، نتایج زیر قابل مشاهده است:

- ۱- با افزایش میزان میرایی، بدون استثناء، میانگین خطای روش‌های مختلف کاهش می‌یابد.
- ۲- در روش شتاب مرتبه دوم، مقادیر میانگین خطای روش حداقل مربعات و روش پتروگالرکین مقادیر خطای دو روش مذکور تا ۳ رقم اعشار دقیقاً یکسان بودند.
- ۳- در روش شتاب مرتبه سوم، مقادیر میانگین خطای روش حداقل مربعات و روش پتروگالرکین تا ۴ رقم اعشار دقیقاً یکسان بودند و با مقادیر میانگین خطای روش تابع وزنی واحد تا ۲ رقم اعشار دقیقاً یکسان بودند.
- ۴- در روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی حداقل مربعات بسط داده شده) میانگین خطا برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب برابر با $۹/۸۶۸ \times 10^{-2}$ ، $۸/۵۳۴ \times 10^{-2}$ ، $۶/۹۷۹ \times 10^{-2}$ ، $۵/۸۷۷ \times 10^{-2}$ و $۴/۷۹۲ \times 10^{-2}$ بود. مقادیر متناظر این اعداد برای روش شتاب مرتبه دوم به ترتیب اعداد $۱/۱۶۰ \times 10^{-1}$ ، $۹/۳۱۰ \times 10^{-2}$ ، $۷/۲۶۶ \times 10^{-2}$ ، $۶/۰۱۴ \times 10^{-2}$ و $۴/۸۵۴ \times 10^{-2}$ بودند که با مقایسه این دو سری اعداد مشخص می‌شود که با افزایش مرتبه شتاب از ۲ به ۳ برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ به ترتیب ۹۳/۱۴، ۴/۰۵، ۲/۲۸ و ۱/۲۸ درصد معیار خطا کاهش یافته است. میانگین کاهش خطا برای تمام میرایی‌ها ۶/۱۷ درصد می‌باشد که عدد کوچکی است.

۴- در روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی حداقل مربعات بسط داده شده) میانگین خطا برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب برابر با $1/251 \times 10^{-1}$ ، $1/077 \times 10^{-1}$ ، $8/734 \times 10^{-2}$ ، $7/300 \times 10^{-2}$ و $5/909 \times 10^{-2}$ بود. مقادیر متناظر این اعداد برای روش شتاب مرتبه دوم به ترتیب اعداد $1/480 \times 10^{-1}$ ، $1/181 \times 10^{-1}$ ، $9/121 \times 10^{-2}$ و $7/486 \times 10^{-2}$ و $5/994 \times 10^{-2}$ که با مقایسه این دو سری اعداد مشخص می‌شود که با افزایش مرتبه شتاب از ۲ به ۳ برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ به ترتیب $15/47$ ، $8/81$ ، $4/24$ و $2/48$ و $1/42$ درصد، معیار خطا کاهش یافته است. میانگین کمینه‌ی خطا برای تمام میرایی‌ها $6/48$ درصد می‌باشد که عدد کوچکی است.

۵- کمینه‌ی میانگین خطا مربوط به روش جینگز ارتقا یافته است که برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ به ترتیب خطاهای $1/283 \times 10^{-2}$ ، $1/054 \times 10^{-2}$ ، $8/610 \times 10^{-3}$ و $7/681 \times 10^{-3}$ و $7/097 \times 10^{-3}$ مشاهده گردید. این مقادیر به مراتب کمتر از خطای روش شتاب مرتبه سوم می‌باشد. یعنی میانگین پنج عدد فوق‌الذکر ۱۰ برابر کمتر از میانگین پنج خطای مربوط به روش شتاب مرتبه سوم (روش کمترین مربعات) است.

۶- روش تفاضل مرکزی، بیشینه‌ی میانگین خطا را در بین این هشت روش عددی داشته است که عدد مربوط به این خطاها برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ به ترتیب $1/990$ ، $1/653$ ، $1/224$ ، $9/525 \times 10^{-1}$ و $7/262 \times 10^{-1}$ است میانگین بیشینه‌ی خطا برای پنج میرایی فوق‌الذکر برابر با $1/31$ است که این میانگین ۱۴ برابر میانگین خطای شتاب مرتبه سوم (روش حداقل مربعات) است.



شکل ۱۱- میانگین خطای روش‌های مختلف عددی برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد برای Δt برابر با $0/18$ ثانیه

با دقت در نمودارهای میله‌ای شکل (۱۱) و اعداد متناظر با آن که مربوط به $\Delta t = 0/18$ ثانیه می‌باشد، نتایج زیر قابل مشاهده است:

۱- با افزایش میزان میرایی، بدون استثناء، میانگین خطای روش‌های مختلف کاهش می‌یابد.

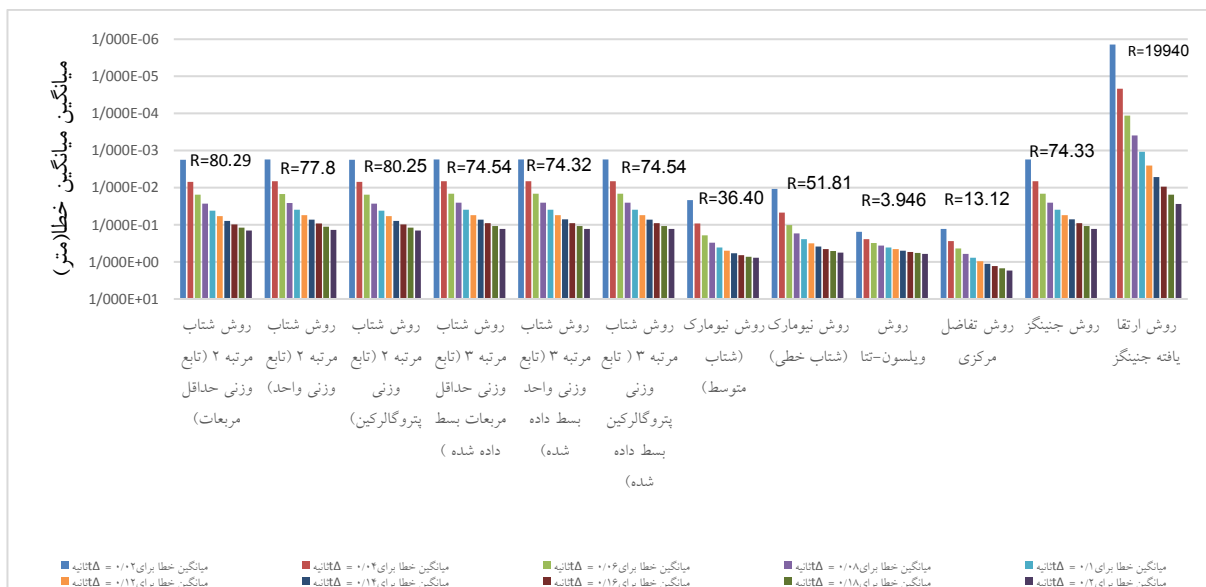
شکل ۱۲- میانگین خطای روش‌های مختلف عددی برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد برای Δt برابر با ۰/۲ ثانیه

با دقت در نمودارهای میله‌ای شکل (۱۲) و اعداد متناظر با آن که مربوط به $\Delta t=0/2$ ثانیه می‌باشد، نتایج زیر قابل مشاهده است:

- ۱- با افزایش میزان میرایی، بدون استثناء میانگین خطای روش‌های مختلف کاهش می‌یابد.
- ۲- در روش شتاب مرتبه دوم، مقادیر میانگین خطای روش حداقل مربعات و روش پتروگالرکین تا ۳ رقم اعشار دقیقاً یکسان بودند.
- ۳- در روش شتاب مرتبه سوم، مقادیر میانگین خطای روش حداقل مربعات و روش پتروگالرکین تا ۴ رقم اعشار دقیقاً یکسان بودند و با مقادیر میانگین خطای روش تابع وزنی واحد تا ۲ رقم اعشار دقیقاً یکسان بودند.
- ۴- در روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی حداقل مربعات بسط داده شده) میانگین خطا برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب برابر با $1/851 \times 10^{-1}$ ، $1/571 \times 10^{-1}$ ، $1/247 \times 10^{-1}$ ، $1/26 \times 10^{-1}$ و $8/295 \times 10^{-2}$ بود. مقادیر متناظر این اعداد برای روش شتاب مرتبه دوم به ترتیب اعداد $2/195 \times 10^{-1}$ ، $1/732 \times 10^{-1}$ ، $1/309 \times 10^{-1}$ ، $1/056 \times 10^{-1}$ و $8/427 \times 10^{-2}$ که با مقایسه این دو سری اعداد مشخص می‌شود که با افزایش مرتبه شتاب از ۲ به ۳ برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ به ترتیب $15/671$ ، $9/295$ ، $4/736$ ، $2/840$ و $1/566$ درصد معیار خطا کاهش یافته است. میانگین کمینه خطا برای تمام میرایی‌ها $6/822$ درصد می‌باشد که عدد کوچکی است.
- ۵- کمینه‌ی میانگین خطا مربوط به روش جنینگز ارتقا یافته است که برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ به ترتیب $3/769 \times 10^{-2}$ ، $3/071 \times 10^{-2}$ ، $2/491 \times 10^{-2}$ ، $2/252 \times 10^{-2}$ و $2/224 \times 10^{-2}$ م مشاهده گردید. این مقادیر به مراتب کمتر از خطای روش شتاب مرتبه سوم می‌باشد. یعنی میانگین پنج عدد فوق‌الذکر برابر کم‌تر از میانگین پنج خطای مربوط به روش شتاب مرتبه سوم (روش کمترین مربعات) است.

۶- روش تفاضل مرکزی، بیشینه‌ی میانگین خطا را در بین این هشت روش عددی داشته است که عدد مربوط به این خطاها برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ به ترتیب $2/430$ ، $2/100$ ، $1/644$ ، $1/303$ و $1/003$ است. میانگین خطاهای حداکثر برای پنج میرایی فوق‌الذکر، برابر با $1/696$ است که این میانگین ۱۳ برابر میانگین خطای شتاب مرتبه سوم (روش حداقل مربعات) است.

در نمودار میله‌ای نشان داده شده در شکل (۱۳)، مقادیر میانگین میانگین خطاها بر حسب گام‌های زمانی مختلف، برای ۱۲ روش مذکور در این مقاله آورده شده است. در بالای نمودار میله‌ای هر روش، عددی در کادر درج گردیده است که بیانگر نسبت خطای گام زمانی ۰/۲ ثانیه به گام زمانی ۰/۰۲ ثانیه است. بزرگترین این نسبت‌ها، مربوط به روش جنینگز ارتقا یافته با نسبت ۱۹۹۴۰ است که حساسیت بسیار زیاد این روش را به گام زمانی نشان می‌دهد. کمترین نسبت‌ها مربوط به روش ویلسون-تتا با نسبت ۳/۹۴۶ است که حساسیت بسیار کم این روش را به گام زمانی نشان می‌دهد. برای سایر روش‌ها، این نسبت‌ها دو رقمی می‌باشد.



شکل ۱۳- میانگین میانگین خطاهای روش‌های مختلف عددی برای میرایی‌های مختلف و Δt برابر با $0.2/0.2$ ثانیه تا $0.2/0.2$ ثانیه

در جدول (۳) مقادیر میانگین ده خطای مربوط به Δt های مختلف (نمودار شکل ۱۳) برای ۱۲ روش مطرح شده در این مقاله آورده شده است. همچنین در این جدول نسبت خطای هر روش به خطای روش جینگز ارتقا یافته که حداقل خطا را دارا بوده است، آورده شده است. با دقت در نسبت‌های درج شده در این جدول، مشخص می‌گردد که کمترین خطا مربوط به روش جینگز ارتقا یافته با نسبت ۱ است و ترتیب افزایش خطا به صورت زیر می‌باشد:

- روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی واحد بسط داده شده) با نسبت خطای $8/8.05$
- روش جینگز با نسبت خطای $8/8.05$
- روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی پتروگالرکین بسط داده شده) با نسبت خطای $8/8.19$
- روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی حداقل مربعات بسط داده شده) با نسبت خطای $8/8.19$
- روش شتاب مرتبه دوم (تابع وزنی واحد) با نسبت خطای $9/0.44$
- روش شتاب مرتبه دوم (تابع وزنی پتروگالرکین) با نسبت خطای $9/5.56$
- روش شتاب مرتبه دوم (تابع وزنی حداقل مربعات) با نسبت خطای $9/5.56$
- روش نیومارک (شتاب خطی) با نسبت خطای $45/18$
- روش ویلسون-تتا با نسبت خطای $67/19$
- روش نیومارک (شتاب متوسط) با نسبت خطای $69/16$
- روش تفاضل مرکزی با نسبت خطای $142/7$

جدول (۳): مقادیر میانگین ده خطای مربوط به Δt های مختلف (نمودار شکل ۱۳) برای ۱۲ روش مطرح شده در این مقاله

نام روش	روش شتاب مرتبه دوم (تابع وزنی حداقل مربعات)	روش شتاب مرتبه دوم (تابع وزنی واحد)	روش شتاب مرتبه دوم (تابع وزنی پتروگالرکین)	روش شتاب مرتبه دوم (تابع وزنی حداقل مربعات)	روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی واحد بسط داده شده)	روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی پتروگالرکین بسط داده شده)
میانگین خطا	$5/902 \times 10^{-2}$	$5/586 \times 10^{-2}$	$5/902 \times 10^{-2}$	$5/447 \times 10^{-2}$	$5/438 \times 10^{-2}$	$5/447 \times 10^{-2}$
نسبت خطا به حداقل خطا	۹/۵۵۶	۹/۰۴۴	۹/۵۵۶	۸/۸۱۹	۸/۸۰۵	۸/۸۱۹
نام روش	روش نیومارک (شتاب متوسط)	روش نیومارک (شتاب خطی)	روش ویلسون-تتا	روش تفاضل مرکزی	روش جنینگز	روش ارتقا یافته جنینگز
میانگین خطا	$4/272 \times 10^{-1}$	$2/790 \times 10^{-1}$	$4/150 \times 10^{-1}$	$8/812 \times 10^{-1}$	$5/439 \times 10^{-2}$	$6/177 \times 10^{-3}$
نسبت خطا به حداقل خطا	۶۹/۱۶	۴۵/۱۸	۶۷/۱۹	۱۴۲/۷	۸/۸۰۵	۱/۰۰

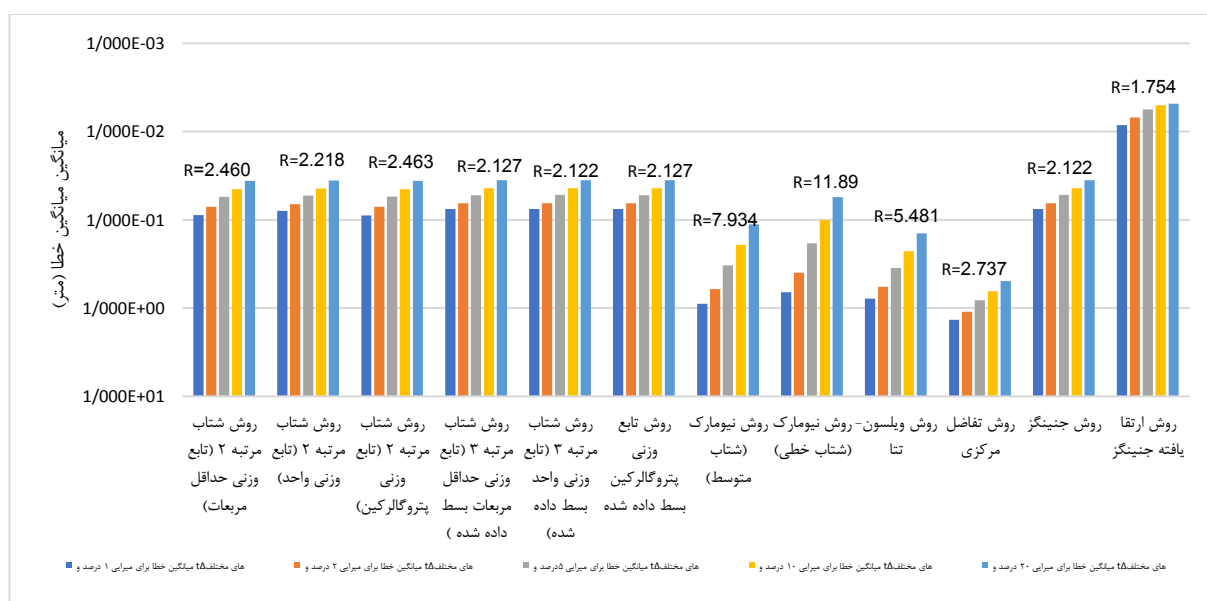
در جدول (۴)، روابط مربوط به روند افزایش خطای روش های مختلف بر حسب گام زمانی آورده شده است. این روابط همگی چند جمله ای های درجه ۳ هستند که همبستگی بسیار مناسبی با مقادیر واقعی شان دارند؛ به طوری که ضریب R^2 آنها، یک یا بسیار نزدیک به عدد یک است.

جدول (۴): روابط مربوط به روند افزایش خطای روش های مختلف بر حسب گام زمانی ($\Delta t \equiv x$)

نام روش	فرمول روند افزایش خطا	R^2
روش شتاب مرتبه دوم (تابع وزنی حداقل مربعات)	$y = -8.455x^3 + 5.5112x^2 - 0.056x + 0.0008$	۱/۰۰
روش شتاب مرتبه دوم (تابع وزنی واحد)	$y = -5.709x^3 + 4.5786x^2 - 0.0082x + 7 \times 10^{-5}$	۱/۰۰
روش شتاب مرتبه دوم (تابع وزنی پتروگالرکین)	$y = -8.5508x^3 + 5.5364x^2 - 0.0577x + 0.0008$	۱/۰۰
روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی حداقل مربعات بسط داده شده)	$y = -7.4838x^3 + 4.8579x^2 - 0.0229x + 0.0003$	۱/۰۰
روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی واحد بسط داده شده)	$y = -7.6257x^3 + 4.8839x^2 - 0.0244x + 0.0003$	۱/۰۰

۱/۰۰	$y = -7.4836x^3 + 4.8579x^2 - 0.0229x + 0.0003$	روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی پتروگالرکین بسط داده شده)
$9/996 \times 10^{-1}$	$y = -77.677x^3 + 19.107x^2 + 3.4805x - 0.0619$	روش نیومارک (شتاب متوسط)
$9/998 \times 10^{-1}$	$y = -75.7x^3 + 25.519x^2 + 0.787x - 0.0173$	روش نیومارک (شتاب خطی)
$9/992 \times 10^{-1}$	$y = 38.944x^3 - 19.474x^2 + 5.0517x + 0.0649$	روش ویلسون-تتا
$9/999 \times 10^{-1}$	$y = -7.5833x^3 + 8.0793x^2 + 7.2581x - 0.0233$	روش تفاضل مرکزی
۱/۰۰	$y = -7.6142x^3 + 4.8814x^2 - 0.0243x + 0.0003$	روش جنینگز
$9/96 \times 10^{-1}$	$y = 11.02x^3 - 2.161x^2 + 0.1376x - 0.0024$	روش ارتقا یافته جنینگز

در نمودار میله‌ای نشان داده شده در شکل (۱۴)، مقادیر میانگین میانگین خطاها بر حسب میرایی‌های مختلف، برای ۱۲ روش مذکور در این مقاله آورده شده است. در بالای نمودار میله‌ای هر روش، عددی در کادر درج گردیده است که بیانگر نسبت خطای میرایی ۱ درصد به میرایی ۲۰ درصد است. بزرگترین این نسبت‌ها، مربوط به نیومارک (شتاب خطی) با نسبت ۱۱/۸۹ است که حساسیت نسبتاً زیاد این روش را به میرایی نشان می‌دهد. کمترین نسبت‌ها مربوط به روش جنینگز ارتقا یافته با نسبت ۱/۷۵۴ است که حساسیت اندک این روش را به میرایی نشان می‌دهد. در ۳ روش مطرح شده در این مقاله برای روش شتاب مرتبه ۳، نسبت‌های خطای دو روش یکسان بودند (عدد ۲/۱۲۷) و نسبت خطای روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی واحد بسط داده شده) در اعشار سوم متفاوت بود. (عدد ۲/۱۲۲) که این موضوع بیانگر حساسیت نه چندان زیاد روش شتاب مرتبه سه به مقدار میرایی است.



شکل ۱۴- میانگین میانگین خطای روش‌های مختلف عددی برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد و Δt های مختلف

در جدول (۵)، روابط مربوط به روند کاهش خطای روش‌های مختلف بر حسب میرایی آورده شده‌است. این روابط مانند روابط جدول (۴)، همگی چند جمله‌ای‌های درجه ۳ هستند که همبستگی مناسبی با مقادیر واقعی‌شان دارند؛ به طوری که ضریب R^2 آنها، بسیار نزدیک به عدد یک است اما دقت آنها کمی کمتر از روابط جدول (۴) می‌باشد.

جدول (۵): روابط مربوط به روند کاهش خطای روش‌های مختلف بر حسب میرایی (بر حسب درصد)

R^2	فرمول روند افزایش خطا	نام روش
$9/862 \times 10^{-1}$	$y = -4 \times 10^{-5}x^3 + 0.0014x^2 - 0.0154x + 0.1003$	روش شتاب مرتبه دوم (تابع وزنی حداقل مربعات)
$9/908 \times 10^{-1}$	$y = -3 \times 10^{-5}x^3 + 0.001x^2 - 0.0115x + 0.0884$	روش شتاب مرتبه دوم (تابع وزنی واحد)
$9/861 \times 10^{-1}$	$y = -4 \times 10^{-5}x^3 + 0.0014x^2 - 0.0154x + 0.1004$	روش شتاب مرتبه دوم (تابع وزنی پتروگالرکین)
$9/943 \times 10^{-1}$	$y = -2 \times 10^{-5}x^3 + 0.0008x^2 - 0.01x + 0.0836$	روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی حداقل مربعات بسط داده شده)
$9/989 \times 10^{-1}$	$y = 22.641x^3 - 2.5424x^2 - 0.4742x + 0.0859$	روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی واحد بسط داده شده)
$9/989 \times 10^{-1}$	$y = 22.242x^3 - 2.4272x^2 - 0.4855x + 0.0863$	روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی پتروگالرکین بسط داده شده)
$9/982 \times 10^{-1}$	$y = 469.9x^3 + 16.246x^2 - 17.567x + 1.2406$	روش نیومارک (شتاب متوسط)
$9/983 \times 10^{-1}$	$y = -80.96x^3 + 115.22x^2 - 20.364x + 1.0231$	روش نیومارک (شتاب خطی)
$9/984 \times 10^{-1}$	$y = 574.09x^3 - 42.496x^2 - 9.9897x + 0.9947$	روش ویلسون-تنا
$9/987 \times 10^{-1}$	$y = 524.76x^3 - 38.416x^2 - 12.624x + 1.6187$	روش تفاضل مرکزی
$9/989 \times 10^{-1}$	$y = 22.644x^3 - 2.5426x^2 - 0.4742x + 0.0859$	روش جنینگز
$9/99 \times 10^{-1}$	$y = 1.3241x^3 + 0.3668x^2 - 0.106x + 0.0104$	روش ارتقا یافته جنینگز

۹- نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در این مقاله روش شتاب مرتبه سوم با استفاده از توابع وزنی واحد، پتروگالرکین و کمترین مربعات بسط داده شد. این کار برای اولین بار است که لاقبل در ایران انجام شده است. سپس، یک سیستم یک درجه آزاد با فرکانس ۱ هرتز و میرایی‌های ۱، ۵، ۲، ۱۰ و ۲۰ درصد با بارگذاری هارمونیک در نظر گرفته شد. فرکانس بارگذاری

هارمونیک از ۰/۰۱ تا ۳ هرتز (با افزایش ۰/۰۱ هرتز) تغییر داده شد و پاسخ تحلیلی (دقیق) آن محاسبه گردید. سپس با روش های عددی شتاب مرتبه سه، شتاب مرتبه دو، روش نیومارک (روش شتاب متوسط و روش شتاب خطی)، روش ویلسون، روش تفاضل مرکزی، روش جینگز و روش جینگز ارتقا یافته پاسخ این سازه محاسبه شد و میزان خطای هر روش با استفاده از معیار جذر میانگین مربعات محاسبه گردید. این کار برای ده Δt انجام شد که کوچکترین آن مقدار ۰/۰۲ ثانیه و بزرگترین آن مقدار ۰/۲۰ ثانیه بود. نتایج کار نشان داد که بیشترین کاهش خطا در روش شتاب مرتبه سه نسبت به روش شتاب مرتبه ۲، مربوط به میرایی ۱ درصد و $\Delta t=0/20$ ثانیه می باشد. کمترین خطا برای تمام Δt ها مربوط به روش جینگز ارتقاء یافته بود. علت این امر ناشی از این موضوع است که در روش جینگز و جینگز ارتقاء یافته برای سمت چپ تساوی معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت هیچ گونه تقریبی در نظر گرفته نمی شود و در سمت راست تساوی معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت که مربوط به بارگذاری است فرض تغییرات خطی شتاب برای روش جینگز و در روش جینگز ارتقا یافته از منحنی های اسپیلاین مکعبی که پیوستگی شیب و مشتق دوم در نقاط اتصال رعایت می شود، استفاده می شود. در روش های دیگر عددی تقریباتی برای شتاب در نظر گرفته می شود. مثلاً در روش نیومارک (روش شتاب متوسط) مقدار شتاب در هر گام زمانی ثابت فرض می شود. یا در روش شتاب مرتبه سه که موضوع این مقاله می باشد، فرض می گردد که تغییرات شتاب در هر گام زمانی به صورت درجه ۳ می باشد که این فرضیات، می تواند بر واقعیات امر منطبق نباشد و در نتیجه باعث خطای قابل توجه می گردد.

با توجه به اینکه تحلیل برای ده گام زمانی و پنج میرایی انجام شد، در نتیجه هر روش شامل پنج میانگین خطا می گردد که با میانگین گیری از این پنج میانگین خطا، میانگین میانگین خطاها به دست آمد که کمترین آنها مربوط به روش جینگز ارتقا یافته و بیشترین آنها مربوط به روش تفاضل مرکزی می گردد. روش جینگز و روش شتاب مرتبه ۳، حدوداً یک میزان خطا داشتند که نسبت خطای آنها به خطای حداقل، حدود ۸/۸ بود.

در پایان، روند تغییرات خطا بر حسب گام زمانی و میرایی بررسی گردید و روابطی به صورت چند جمله ای های درجه ۳ پیشنهاد گردید که همبستگی مناسبی با مقادیر واقعی شان داشتند.

پیشنهاد می گردد در ادامه ی این تحقیقات، سیستم های چند درجه آزاد خطی و نیز سیستم های غیر خطی نیز با این روش های عددی، مورد بررسی قرار گیرند و میزان خطای این روش ها در این موارد نیز بررسی گردند.

فهرست علائم:

m جرم سیستم یک درجه آزاد

n تعداد بازه‌ها

c ضریب میرایی

K ضریب سختی فنر

y و u جابجایی مطلق یا نسبی جرم سیستم یک درجه آزاد

\dot{y} و \dot{u} سرعت مطلق یا نسبی جرم سیستم یک درجه آزاد

\ddot{y} و \ddot{u} شتاب مطلق یا نسبی جرم سیستم یک درجه آزاد

t, τ متغیر زمان

$p(t)$ نیروی تحریک کننده سیستم یک درجه آزاد

p_0 دامنه نیروی تحریک کننده سینوسی

ω فرکانس زاویه‌ای بار سینوسی

ω_n فرکانس زاویه‌ای طبیعی نامیرای سیستم یک درجه آزاد

T_n دوره تناوب ارتعاش طبیعی نامیرای سیستم یک درجه آزاد

ω_D فرکانس زاویه‌ای طبیعی میرای سیستم یک درجه آزاد

ζ نسبت میرایی سیستم یک درجه آزاد

$\Delta t, \Delta t_i$ گام زمانی

- [1] Gholampour, A.A., Ghasemiye, M., Fallahnejad, H. “***Direct Time Integration Method for Nonlinear Structural Problems***”, Proceedings of the 6th National Congress on Civil Engineering, Semnan University, Iran, Semnan, Spring 2011.(in Persian)
- [2] Chang, S. Y., “***Accurate integration of nonlinear systems using Newmark explicit method***”, Journal of Mechanics, 25(3), pp 289-297, 2009.
- [3] Mahmoudabadi, M., Taghavi, B., Hassani, S.M.R., Hosseini, S.M.J., “***Improvement of the Jennings method using spline interpolation function for numerical calculation of the response coefficient of linear single-degree-of-freedom systems***”, Journal of Earthquake Science and Engineering, Online publication:2023. (in Persian)
- [4] Mahmoodabadi, M., Hosseini, S.M.J., “***Comparison nonlinear spectra of elastoplastic systems resulting from two excitation interpolation methods***”, Ferdowsi Civil Engineering Journal, Vol. 36, No. 4 ,winter 2024.(in Persian)
- [5] Chopra, A., “***Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering***”, 3rd ed., Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey,2007.