رابطه سازی یک جزء سه پهلو با ترک کشسان ـ مومسان*

دکتر محمد رضایی پژند(۱)		سید روحا... موسوی(۲)

چکیده درهنگام ایجاد ترک نرمی سازه افزایش می‌یابد. افزایش نرمی باعث زیاد شدن تغییرمکان‌ها خواهد شد. در این مقاله، یک جزء سه پهلو دارای ترک میانی رابطه سازی خواهد شد. اساس رابطه سازی این جزء بر روی افزایش نرمی ناشی از ترک خوردگی گذاشته شده است. برای رابطه سازی، ابتدا رابطه میان نرخ رهایی انرژی و ضریب شدت تنش درمکانیک شکست استفاده می‌شود و مقدار انرژی ناشی از ترک‌خوردگی حساب می‌شود. در ادامه، درایه‌های ماتریس نرمی اضافی ناشی از ترک خوردگی، در یک دستگاه مستقل نیرویی، به دست می‌آید. ماتریس مزبور، به نرمی پیش از ترک خوردگی افزوده می‌شود. با بهره‌جویی از ماتریس‌های مبدل نیرویی و نرمی، ماتریس سختی جزء ترک خورده برای مسأله مستوی حساب می‌گردد. ماتریس سختی به دست آمده از این روش، میزان کاهش سختی ناشی از ترک خوردگی را در ماتریس سختی جزء سالم وارد کرده است.

واژه‌های کلیدی اجزای محدود، مکانیک شکست، ترک، نرمی، سختی، ضریب شدت تنش، ماتریس مواد، نرخ رهایی انرژی.

Formulating a Triangular Element with Elasto – Plastic Crack

M. R. Pajand		S. R. Mousavi

Abstract *Cracking increases the flexibility and displacement of structures. This paper introduces a triangular element with internal crack considering the increase in flexibility of the element. First, Relationship between strain energy release rate and stress intensity factor by fracture mechanic approach is used to calculated energy released by the crack. Then, additional flexibility matrix is obtained in the independent system. This matrix is added to the compliance matrix of a non-cracked element. Finally, Stiffness matrix is calculated by compliance matrix and transformation matrix for the plane problem. Stiffness matrix obtained with this approach includes the decreasing effect of stiffness due to cracking.*

Key Words Finite Element, Fracture Mechanic, Crack, Flexibility, Stress Intensity Factor, Material Matrix, Energy Release Rate.

---

*تاریخ دریافت نسخهٔ نهایی اصلاح شده ۸۷/٦/۱۹ و تاریخ تصویب مقاله۸۷/۷/۱۷ .

(۱) استاد، گروه عمران، دانشکدهٔ مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

(۲) کارشناس ارشد، گروه عمران، دانشکدهٔ مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

مقدمه

هنگام ترک خوردن، سختی سازه کـاهش، و میرایـی آن افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر ، وجـود تـرک در یـک عضو سازه‌ای، سبب افزایش نرمـی مـی‌گـردد. در سـال ۲۰۰۰ میلادی، چانگ و لی، با بهره‌جویی از این ویژگی، ماتریس سختی جزء تیری ترک خورده را در حالـت دو بعدی تشکیل دادند. در ایـن پـژوهش، آن‌هـا از نـسبت تغییر بسامد طبیعی سازه، در دو مـود گونـاگون، هنگـام ترک خوردگی استفاده کردند و به آسیب‌یـابی تـرک در تیر طره‌ای پرداختند[1].

در سال ۲۰۰۲ میلادی، سینها و فریس ول، بـا بـه کار گرفتن یک الگوی بسیار ساده، ماتریس سختی جزء تیری ترک خورده را رابطه‌سازی کردنـد. در ایـن الگـو، نرمی به صورت خطی از حالت بدون تـرک بـه حالـت ترک خورده، تغییر می‌کند [2]. در سـال ۲۰۰۳ مـیلادی، کرازوک، یک جزء تیری ترک خورده به کار برد کـه در آن ترک به وسیلهٔ یک فنر، الگوسازی شـده بـود. نرمـی خمشی و برشی این فنر با استفاده از قضیهٔ کاسـتیگلیانو و قانون‌های مکانیک شکست به دست می‌آمدند. وی بـا حـل معادلـهٔ دیفرانـسیل نوسـان آزاد تیـر و برقـراری شرط‌هـای مـرزی، پاسـخ دینـامیکی تیـر تیموشـنکو را حساب کرد[3].

در سال ۲۰۰۱ میلادی، کرازوک و هم‌کاران، یـک جزء صفحهٔ خمشی با ترک میانی را رابطه‌سازی کردنـد. این الگو براساس مکانیک شکست کشسان – مومسان و روش اجزای محدود استوار بود. آن‌هـا مـاتریس نرمـی صفحهٔ مستطیلی با چهار گره و سه درجه آزادی در هـر گـره را حـساب کردنـد[4]. در همـان سـال، بلتـی و هم‌کاران، ماتریس مواد را برای یک جـزء غـشایی بـتن مسلح به دست آورند. در این پژوهش، رفتار غیر خطـی بتن مسلح در شکست، وارد تحلیل شد. آن‌ها توانـستند اثرهای سخت‌شوندگی کششی ناشی از میل‌گردها، قفـل و بست دانه‌ای، عمل شاخه‌ای میل‌گردهـا، غیـرهم‌سـان شدن رفتار جزء پس از ترک خوردگی و نـرم شـوندگی کرنشی را وارد ماتریس مواد کنند. این ماتریس تابعی از میزان بازشدگی و لغزش لبه‌های ترک مـی‌باشـد[5]. در همین سال، ساودرا، یک جزء تیـری تـرک‌خـورده را در حالت سه بعدی، رابطه‌سازی کرد و ماتریس سـختی آن را به دست آورد[6].

در سـال ۲۰۰۳ مـیلادی، فوسـتر و مـارتی جـزء غشایی ترک را برای بتن مـسلح رابطـه‌سـازی نمودنـد. آن‌ها رابطهٔ بین تنش و کرنش در محورهای محلی ترک را نوشتند سپس ماتریس مواد را به محـورهـای محلـی جزء یاد شده انتقال دادنـد و اثـرهـای سـخت‌شـوندگی کششی فودلاها را به آن افزودند[7].

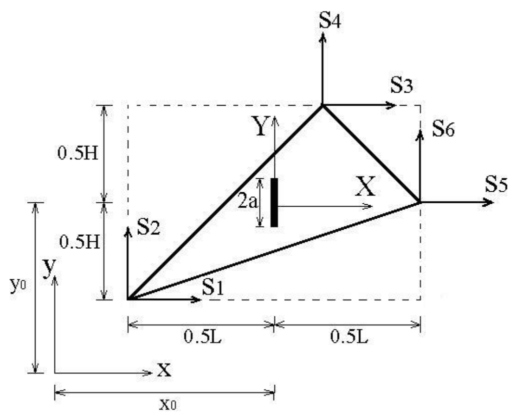
در این مقاله، یک جزء مستوی دارای ترک میانی، رابطه‌سازی خواهد شد. درجه‌های آزادی ایـن جـزء در درون صفحهٔ سازه واقع‌اند که برای تحلیـل سـازه‌هـایی مناسب اند که بارها در صـفحهٔ سـازه وارد شـوند. ایـن جزء در تحلیل دیوار برشی، تیرهای عمیـق و سـدهـای وزنی ترک‌دار، کاربرد دارد. یکی از مزیت‌های این جزء، مثلثی بودن آن می‌باشد که توانایی پوشش بهتـر سـطوح را در شبکه‌بندی شکل‌هـای نـامنظم خواهـد داشـت. از دیگر مزیت‌ها، وجود ترک در داخل جزء می‌باشد. ایـن ویژگی، امکان به کارگیری این جزء را در مسائل تخمین خسارت فراهم می‌آورد. از محدودیت‌های جزء یاد شده این است که باید ترک در میانهٔ جزء قرار گیرد.

ماتریس نرمی جزء سه پهلوی ترک‌دار

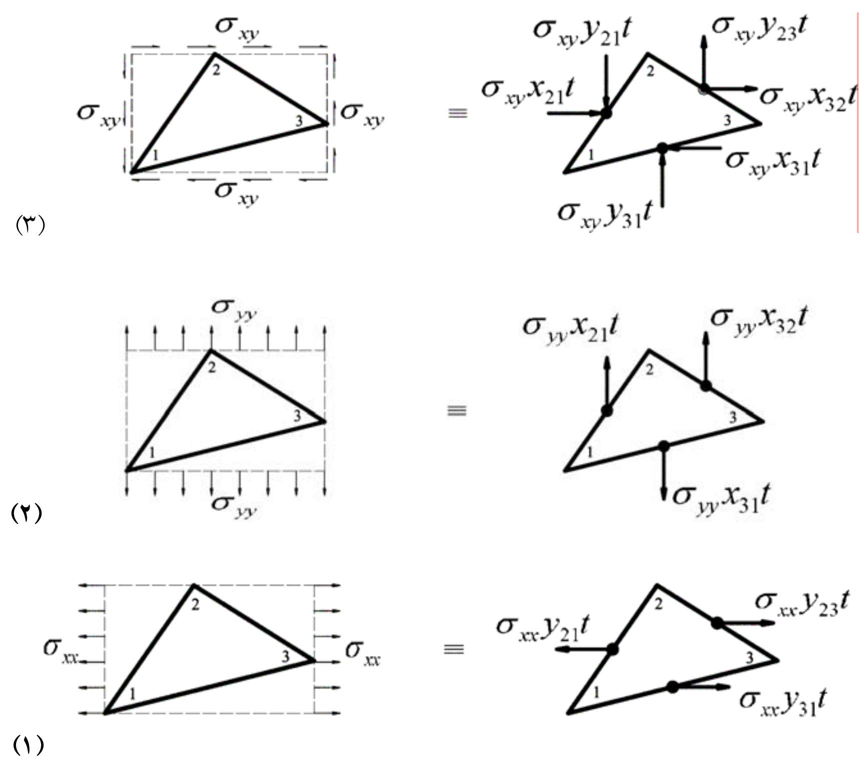
بر اساس ویژگی درایه‌هـای مـاتریس نرمـی جـزء‌هـای تـرک‌دار، مـی تـوان آن‌هـا را حـساب کـرد. سـپس بـا وارون‌سازی، ماتریس سختی بـه دسـت مـی‌آیـد. بایـد افزود، ترک سبب به وجود آمدن تغییر مکان اضافی بین مقطع‌های دو سـوی آن مـی‌شـود؛ در نتیجـه، مـاتریس

نرمی جزء افزایش می‌یابد. در ادامهٔ این کار، نخست، ماتریس نرمی جزء سالم حساب می‌گردد و به دنبال آن، می توان نرمی اضافی ناشی از ترک خوردگی را به آن افزود.

در جزء سالم، تنش‌ها در همهٔ نقطه‌های جزء، ثابت می‌باشد. می توان، همانند شکل (۲-۱)، میدان تنش ثابت σ_{xx}را با نیروهای معادل ایستایی آن در وسط گره‌های مثلث جایگزین نمود.



شکل ۱ نیروهای وابستهٔ عضوی



شکل ۲ نیروهای ایستایی روی جزء

این نیروها براساس رابطه‌های زیر به گره‌های مجاور منتقل می‌شوند:

$$S_1 = \frac{1}{2}(y_{31} - y_{21}).t.\sigma_{xx} = \frac{1}{2}y_{32}.t.\sigma_{xx} \quad ;S_2 = 0$$

$$S_3 = \frac{1}{2}(y_{23} - y_{21}).t.\sigma_{xx} = -\frac{1}{2}y_{31}.t.\sigma_{xx} \quad ;S_4 = 0$$

$$S_5 = \frac{1}{2}(y_{23} + y_{31}).t.\sigma_{xx} = \frac{1}{2}y_{21}.t.\sigma_{xx} \quad ;S_6 = 0$$

(۱)

در رابطه‌های (۱)، t ضخامت جزء می‌باشد. عامل‌های x_{ij} و y_{ij}، به وسیلهٔ رابطه‌های زیر به دست می‌آیند :

$$x_{ij} = x_i - x_j$$
$$y_{ij} = y_i - y_j$$
$$i, j = 1, 2, 3$$

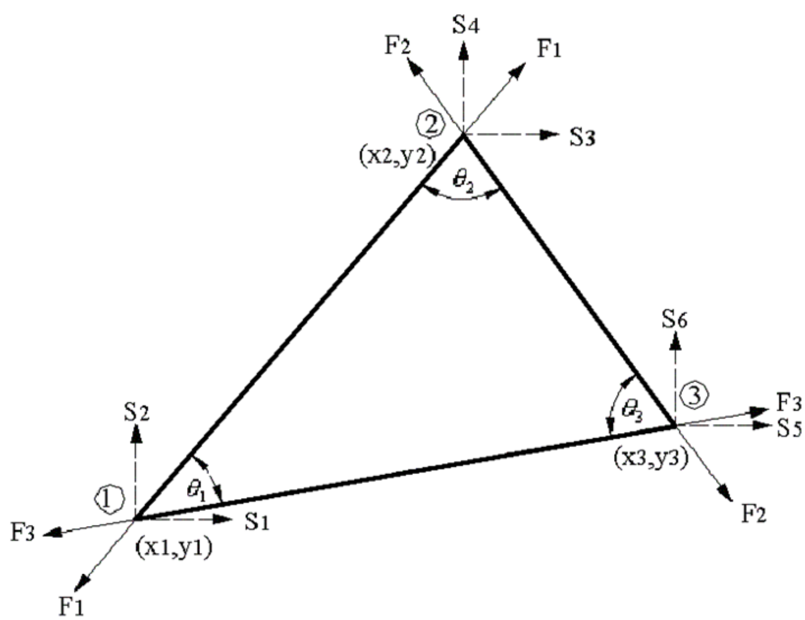
(۲)

پس از به‌کارگیری این فرایند، برای σ_{yy} و σ_{xy} همانند شکل‌های (۲-۲) و (۲-۳)، برابری‌های زیر در دسترس قرار می‌گیرد:

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{Bmatrix} = \frac{t}{2}\begin{bmatrix} y_{32} & 0 & -x_{32} \\ 0 & -x_{32} & y_{32} \\ -y_{31} & 0 & x_{31} \\ 0 & x_{31} & -y_{31} \\ y_{21} & 0 & -x_{21} \\ 0 & -x_{21} & y_{21} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}$$

(۳)

ماتریس مبدل نیرویی،درتحلیل به روش نرمی نقش بسزایی دارد. این ماتریس، نیروهای وابستهٔ عضوی را به نیروهای مستقل گرهی پیوند می‌دهد. نیروهای وابستهٔ S_1 تا S_6 همانند شکل (۱) می باشد. این نیروها به وسیلهٔ سه معادلهٔ ایستایی به هم وابسته‌اند. نیروهای مستقل گرهی F_1، F_2 و F_3، به صورت شکل (۳) انتخاب می‌گردد.



شکل ۳ نیروهای مستقل گرهی

رابطه‌های زیر، بین نیروهای نامبرده برقرارند:

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_{12} & 0 & l_{31} \\ -m_{12} & 0 & m_{31} \\ l_{12} & -l_{23} & 0 \\ m_{12} & -m_{23} & 0 \\ 0 & l_{23} & -l_{31} \\ 0 & m_{23} & -m_{31} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$
$$\Rightarrow \{S\} = [T]\{F\} \qquad (٤)$$

در رابطهٔ کنونی، m_{ij}, l_{ij} کسینوس‌های هادی لبهٔ ij $(i, j = 1,2,3)$ می‌باشد. اگر فقط F_1 به جزء وارد شود، تنش‌های ناشی از این نیرو با استفاده از رابطه‌های (۳) و (٤) به صورت زیر در دسترس قرار می‌گیرند:

$$\sigma_{xx} = \frac{2\ell_{12}^2 F_1}{th_3} \quad ; \quad \sigma_{yy} = \frac{2m_{12}^2 F_1}{th_3}$$
$$\sigma_{xy} = \frac{2\ell_{12} m_{12} F_1}{th_3} \qquad (۵)$$

در این‌جا، h_3 ارتفاع سه پهلو از گوشهٔ (۳) می‌باشد. از سوی دیگر، رابطهٔ بین تنش‌ها و نیروهای مستقل گرهی به صورت زیر می‌باشد[8]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{2}{t} \begin{bmatrix} \frac{\ell_{12}^2}{h_3} & \frac{\ell_{23}^2}{h_1} & \frac{\ell_{31}^2}{h_2} \\ \frac{m_{12}^2}{h_3} & \frac{m_{23}^2}{h_1} & \frac{m_{31}^2}{h_2} \\ \frac{\ell_{12} m_{12}}{h_3} & \frac{\ell_{23} m_{23}}{h_1} & \frac{\ell_{31} m_{31}}{h_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$
$$\Rightarrow \{\sigma\} = [\bar{c}]\{F\} \qquad (٦)$$

یادآور می‌شود که ماتریس نرمی جزء سالم به وسیلهٔ رابطهٔ زیر حساب می‌گردد:

$$[c]^0 = \int_V [\bar{c}]^T [\phi][\bar{c}] dv \qquad (٧)$$

در این رابطه، $[\phi]$ وارون ماتریس مواد می‌باشد که به شکل زیر است:

$$[\phi] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\upsilon & 0 \\ -\upsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\upsilon) \end{bmatrix} \qquad (٨)$$

ماتریس نرمی جزء سالم، $[c]^0$ را می توان به صورت زیر درآورد:

$$[c]^0 = \frac{2}{Et} \begin{bmatrix} \left(\frac{\sin\theta_3}{\sin\theta_1 \sin\theta_2}\right) & (\cos\theta_2 \cot g\theta_2 - \upsilon \sin\theta_2) & (\cos\theta_1 \cot g\theta_1 - \upsilon \sin\theta_1) \\ (\cos\theta_2 \cot g\theta_2 - \upsilon \sin\theta_2) & \left(\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2 \sin\theta_3}\right) & (\cos\theta_3 \cot g\theta_3 - \upsilon \sin\theta_3) \\ (\cos\theta_1 \cot g\theta_1 - \upsilon \sin\theta_1) & (\cos\theta_3 \cot g\theta_3 - \upsilon \sin\theta_3) & \left(\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1 \sin\theta_3}\right) \end{bmatrix} \qquad (٩)$$

زاویه‌های : θ_1، θ_2و θ_3 وابسته به گوشه‌های جزءاند. ضریب کشسانی، ضخامت و نسبت پواسون جزء، به ترتیب: t ،E و v می‌باشند. در هنگام ایجاد ترک، تنش‌های عمود بر امتداد ترک و تنش‌های برشی لبه‌های آن، به سوی صفر نزدیک می‌شود؛ در نتیجه، انرژی نهفتهٔ کل کاهش یافته و نرمی افزایش خواهد یافت. براساس قضیهٔ کاستیگلیانو، درایه‌های ماتریس نرمی اضافی درهنگام ترک خوردگی، به شکل زیر در دسترس قرار می‌گیرد[1,6]:

$$\left[c_{ij}\right]^{1} = \frac{\partial^2 u^1}{\partial F_i \partial F_j} \qquad (۱۰)$$

در ایـــن‌جـــا، F_i و F_j نیروهـــای مـــستقل گرهـــی مـی‌باشـند $(i, j = 1, 2, 3)$. انـرژی کرنـشی رهـا شـده در هنگام ترک خوردگی، u^1، به شکل زیر حساب می‌گردد:

$$u^1 = \frac{1}{E}\int_A \left(\sum_{i=1}^{3} k_I^2, i + \sum_{i=1}^{3} k_{II}^2, i\right) dA \qquad (۱۱)$$

دراین رابطه، k_I و k_{II} به ترتیـب، ضـریب‌هـای شدت تنش متناظر با حالت‌های I و II ترک خـوردگی، و E ضریب کشسانی مواد می‌باشد. ضریب‌های شـدت تنش کشسان در جزء دارای ترک میانی به صورت زیـر است [4,9]:

$$k_{Ie} = \frac{1}{\sqrt{\pi a}}\int_{-a}^{a} \sigma_{XX}(0, Y)\sqrt{\frac{a+Y}{a-Y}}\,dY \qquad (۱۲)$$

$$k_{IIe} = \frac{-1}{\sqrt{\pi a}}\int_{-a}^{a} \sigma_{XY}(0, Y)\sqrt{\frac{a+Y}{a-Y}}\,dY \qquad (۱۳)$$

براســــاس رابطـــهٔ (٦) مقـــــدار $\sigma_{XX}(0, Y)$، $\sigma_{XY}(0, Y)$ به وسیلهٔ برابری‌های زیر در دسترس قـرار می‌گیرد:

$$\sigma_{XX}(0, Y) = \frac{2}{t}\left[\frac{\ell_{12}^2}{h_3}F_1 + \frac{\ell_{23}^2}{h_1}F_2 + \frac{\ell_{31}^2}{h_2}F_3\right] \qquad (۱٤)$$

$$\sigma_{XY}(0, Y) = \frac{2}{t}\left[\frac{\ell_{12} m_{12}}{h_3}F_1 + \frac{\ell_{23} m_{23}}{h_1}F_2 + \frac{\ell_{31} m_{31}}{h_2}F_3\right] \qquad (۱٥)$$

با جاگذاری برابری‌های (۱٤)، (۱٥) در رابطه‌های (۱۲) و (۱۳) و در نظر گرفتن تابع تصحیح ابعـاد جـزء، ضریب شدت تـنش بـرای حالـت کشـسان، بـه دسـت می‌آید:

$$\begin{cases} k_{Ie,1} = \dfrac{2\sqrt{\pi a}.Y(g)}{th_3}\ell_{12}^2 F_1 \\ k_{Ie,2} = \dfrac{2\sqrt{\pi a}.Y(g)}{th_1}\ell_{23}^2 F_2 \\ k_{Ie,3} = \dfrac{2\sqrt{\pi a}.Y(g)}{th_2}\ell_{31}^2 F_3 \end{cases} \qquad (۱٦)$$

$$\begin{cases} k_{IIe,1} = \dfrac{-2\sqrt{\pi a}.Y(g)}{th_3}.\ell_{12}.m_{12}.F_1 \\ k_{IIe,2} = \dfrac{-2\sqrt{\pi a}.Y(g)}{th_1}.\ell_{23}.m_{23}.F_2 \\ k_{IIe,3} = \dfrac{-2\sqrt{\pi a}.Y(g)}{th_2}.\ell_{31}.m_{31}.F_3 \end{cases} \qquad (۱۷)$$

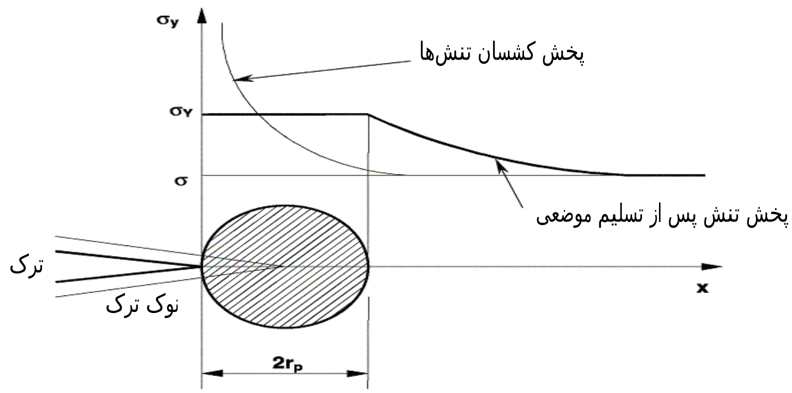
در رابطـه‌هـای کنـونی، تـابع تـصحیح $Y(g)$ بـه صورت زیر است[4]:

$$Y(g) = 1 + 0.01876\left(\frac{2a}{H}\right) + 0.1825\left(\frac{2a}{H}\right)^2 + 2.024\left(\frac{2a}{H}\right)^3 - 2.4316\left(\frac{2a}{H}\right)^4 \qquad (۱۸)$$

در رابطــهٔ (۱۸)، 2a طــول تــرک و H ارتفــاع مستطیل محیط بر جزء در راستای ترک مـی‌باشـد. ایـن عامل‌ها در شکل(۱) نمـایش داده شـده‌است. براسـاس الگوی ایروین، برای ترک میانی، ضـریب شـدت تـنش کشسان ـ مومـسان بـه صـورت زیـر در دسـترس قـرار می‌گیرد:

$$k_I = Y(g).\sigma.\sqrt{2a + 2r_p} \qquad (۱۹)$$

در این‌جا، σ تنش اسمی اسـت. بایـد آگـاه بـود، تابع $Y(g)$ به هندسهٔ ترک و انـدازه‌هـای جـزء بـستگی دارد.



شکل ٤ ناحیهٔ مومسان درنوک ترک

ایروین، اثر افزایش نرمی در نتیجه تسلیم نوک ترک را با یک شعاع فرضی r_p نشان داد. او در سال ۱۹۶۰، برای محاسبهٔ r_p رابطهٔ زیر را پیشنهاد نمود[10]:

$$r_p = \alpha\left(\frac{k_{Ie}}{\sigma_{yi}}\right)^2 \qquad (۲۰)$$

در این برابری، k_{Ie} ضریب شدت تنش حالت یکم ترک‌خوردگی در تغییر شکل کشسان و σ_{yi} تنش تسلیم مواد می‌باشد. عامل α ، به وسیلهٔ رابطهٔ زیر در دسترس قرار می‌گیرد :

$$\alpha = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} & \text{مسألهٔ تنش مستوی} \\[2ex] \dfrac{1}{6\pi} & \text{مسألهٔ کرنش مستوی} \end{cases}$$

از جاگزینی رابطهٔ (۲۰) در برابری (۱۹)، نتیجهٔ زیر پیدا می‌شود:

$$k_I = Y(g).\sigma.\sqrt{2a + \frac{1}{\pi}\left(\frac{k_{Ie}}{\sigma_{yi}}\right)^2} = k_{Ie}\sqrt{1+\frac{Y^2(g)}{\pi}\left(\frac{\sigma}{\sigma_{yi}}\right)^2} \qquad (۲۱)$$

با جایگذاری رابطه‌های (١٦) و (١٧) در برابری (٢١)، ضریب شدت کشسان- مومسان بازنویسی می‌گردد:

$$\begin{cases} k_{I,1} = \dfrac{2\sqrt{\pi a}.Y(g)}{th_3}.\ell_{12}^2.F_1.\sqrt{1+\dfrac{Y^2(g)}{\pi}\left(\dfrac{\sigma_{xx}}{\sigma_{yi}}\right)^2} \\ k_{I,2} = \dfrac{2\sqrt{\pi a}.Y(g)}{th_1}.\ell_{23}^2.F_2\sqrt{1+\dfrac{Y^2(g)}{\pi}\left(\dfrac{\sigma_{xx}}{\sigma_{yi}}\right)^2} \\ k_{I,3} = \dfrac{2\sqrt{\pi a}.Y(g)}{th_2}.\ell_{31}^2.F_3\sqrt{1+\dfrac{Y^2(g)}{\pi}\left(\dfrac{\sigma_{xx}}{\sigma_{yi}}\right)^2} \end{cases} \qquad (۲۲)$$

$$\begin{cases} k_{II,1} = \dfrac{-2\sqrt{\pi a}.Y(g)}{th_3}.\ell_{12}.m_{12}.F_1\sqrt{1+\dfrac{Y^2(g)}{\pi}\left(\dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_{yi}}\right)^2} \\ k_{II,2} = \dfrac{-2\sqrt{\pi a}.Y(g)}{th_1}.\ell_{23}.m_{23}.F_2\sqrt{1+\dfrac{Y^2(g)}{\pi}\left(\dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_{yi}}\right)^2} \\ k_{II,3} = \dfrac{-2\sqrt{\pi a}.Y(g)}{th_2}.\ell_{31}.m_{31}.F_3\sqrt{1+\dfrac{Y^2(g)}{\pi}\left(\dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_{yi}}\right)^2} \end{cases} \qquad (۲۳)$$

در حالتی که نوک ترک کشسان و یا مومسان

باشد، رابطه‌های زیر برقرار می‌شود:

$$\begin{cases} \dfrac{\sigma_{xx}}{\sigma_{yi}} = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_{yi}} = 0 & \text{کشسان کامل} \\[2ex] \dfrac{\sigma_{xx}}{\sigma_{yi}} = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_{yi}} = 1 & \text{مومسان کامل} \end{cases} \tag{۲۴}$$

در ادامهٔ این کار، به بررسی حالت مومسان نوک ترک پرداخته می‌شود. با جایگزینی رابطه‌های (۲۲) و (۲۳) در رابطه‌های(۱۰) و (۱۱) و ساده‌سازی، درایه‌های ماتریس نرمی اضافی ناشی از ترک خوردگی، در دسترس قرار می‌گیرد:

$$C_{12}^1 = C_{21}^1 = \frac{\partial^2 u^1}{\partial F_1 \partial F_2} = 0$$

$$C_{13}^1 = C_{31}^1 = C_{32}^1 = C_{23}^1 = 0$$

$$C_{11}^1 = \frac{2\pi H^2}{Et}\left(\frac{\ell_{12}^4}{h_3^2} + \frac{\ell_{12}^2 . m_{12}^2}{h_3^2}\right).F(g)$$

$$C_{22}^1 = \frac{2\pi H^2}{Et}\left(\frac{\ell_{23}^4}{h_1^2} + \frac{\ell_{23}^2 . m_{23}^2}{h_1^2}\right).F(g)$$

$$C_{33}^1 = \frac{2\pi H^2}{Et}\left(\frac{\ell_{31}^4}{h_2^2} + \frac{\ell_{31}^2 . m_{31}^2}{h_1^2}\right).F(g) \tag{۲۵}$$

در این‌جا، $F(g)$ به صورت زیر معرفی می‌گردد:

$$\begin{aligned} F(g) = {} & -4.359g^{17} - 2.356g^{15} + 7.135g^{13} + 0.759g^{11} \\ & - 6.256g^9 + 0.5398g^7 + 2.658g^5 + 0.0409g^3 \end{aligned} \tag{۲۶}$$

در رابطهٔ بالا، $g = \frac{2a}{H}$ می‌باشد. سرانجام، ماتریس نرمی اضافی ناشی از ترک خوردگی به صورت زیر درمی‌آید:

$$[C]^1 = \begin{bmatrix} C_{11}^1 & 0 & 0 \\ 0 & C_{22}^1 & 0 \\ 0 & 0 & C_{33}^1 \end{bmatrix} \tag{۲۷}$$

با روی هم گذاری، ماتریس نرمی کل جزء به وسیلهٔ برابری زیر حساب می‌شود:

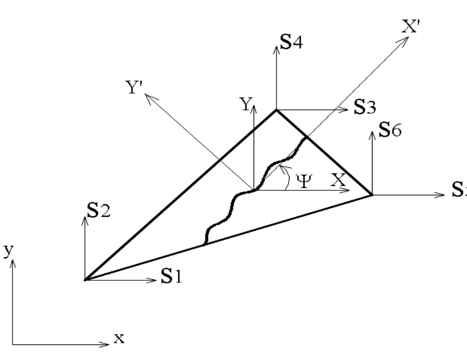
$$[C] = [C]^0 + [C]^1 \tag{۲۸}$$

ماتریس سختی جزء پیشنهادی

با داشتن ماتریس نرمی جزء ترک‌دار در دستگاه مستقل گرهی و به کارگیری ماتریس مبدل نیرویی در برابری (٤)، ماتریس سختی جزء، توسط رابطهٔ انتقالی زیر در دسترس قرار می‌گیرد:

$$[K_e] = [T]^T [C]^{-1} [T] \tag{۲۹}$$

برای وارسی کردن درستی الگوی پیشنهادی، این روش با الگوی ترک پخش شده، مقایسه خواهد شد. رشید برای نخستین بار الگوی ترک پخش شده را پیشنهاد کرد[11]. براساس این الگو، هنگامی که تنش کششی اصلی از مقاومت کششی جسم بیشتر شود، ترک ایجاد می‌گردد. پس از پیدایش ترک، جسم به صورت غیر هم‌سان رفتار می‌کند. شکل (۵)، جزئی را نشان می‌دهد که در جهت محور محلی X' ترک خورده است. در شکل یاد شده، ψ زاویهٔ امتداد ترک با محور X می‌باشد:



شکل ۵ ترک پخش شده

هنگامی که جسم ترک می‌خورد، باید ماتریس مواد اصلاح گردد. ساده‌ترین رابطه‌ای که می‌تواند رفتار جسم را پس از ترک مشخص نماید به شکل زیر است [11,12]:

$$\begin{Bmatrix} d_{\sigma_{X'}} \\ d_{\sigma_{Y'}} \\ d_{\tau_{X'Y'}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_t G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{\varepsilon_{X'}} \\ d_{\varepsilon_{Y'}} \\ d_{\gamma_{X'Y'}} \end{Bmatrix}$$

$$\rightarrow \{d_{\sigma'}\} = [D_{cr}]_{\ell} \{d_{\varepsilon'}\} \qquad (۳۰)$$

در هنگام ترک خوردگی، مقداری از نیروی برشی، توسط لبه‌ها منتقل می‌گردد. ضریب β_t اثر قفل و بست دانه‌ای را وارد تحلیل می‌کند. این ضریب در هنگام رشد ترک تغییر خواهد کرد؛ به گونه‌ای که در آغاز ترک‌خوردگی، این ضریب یک است و با گسترش ترک به سوی صفر نزدیک می‌شود. انتخاب این مقدار به نوع و دقت تحلیل بستگی دارد. با این همه به طور معمول، این ضریب برابر با ۰/۱ انتخاب می‌شود. برای محاسبهٔ ماتریس سختی جزء، ماتریس مواد آن از محورهای محلی (l) به محورهای کلی (G) منتقل می‌گردد:

$$[D_{cr}]_G = [E]^T [D_{cr}]_{\ell} [E] \qquad (۳۱)$$

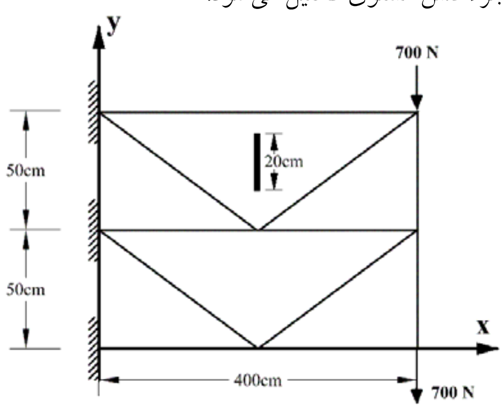
$$[E] = \begin{bmatrix} \cos^2\psi & \sin^2\psi & \cos\psi\sin\psi \\ \sin^2\psi & \cos^2\psi & -\cos\psi\sin\psi \\ (-2\cos\psi\sin\psi) & (2\cos\psi\sin\psi) & (\cos^2\psi - \sin^2\psi) \end{bmatrix} \qquad (۳۲)$$

با داشتن ماتریس مواد جزء ترک خورده $[D_{cr}]_G$ و نیز ماتریس کرنش $[B]$، ماتریس سختی آن $[K]$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$[K] = \int_A \lceil B \rceil^T [D_{cr}]_G \lfloor B \rfloor t \, dA \qquad (۳۳)$$

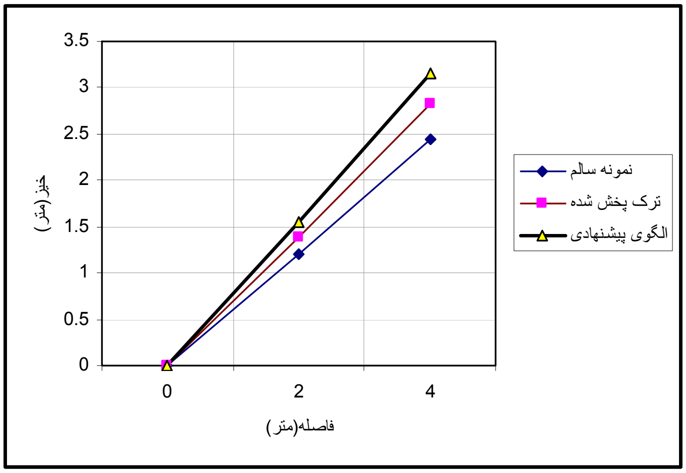
نمونه‌های عددی

مثال ۱: تیر طره‌ای با طول ٤ متر، ارتفاع یک متر و ضخامت ۰/۱ مترتحلیل می‌گردد. ضریب کشسانی سازه ۲۱۰۰۰۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع و نسبت پواسون آن۰/۳ می‌باشد. این تیر، دارای ترک میانی قائمی به بزرگی ۰/۲ متر است. شبکه‌بندی سازه همانند شکل (٦) است. چگالی مواد تیر ۹۸۱۰۰ نیوتن برمترمکعب می‌باشد. این سازه در سر آزاد خود، در بالا و پایین، زیر اثر بار متمرکز ۷۰۰ نیوتن قرار دارد. این تیر به وسیلهٔ شش جزء تنش مستوی تحلیل می‌شود:

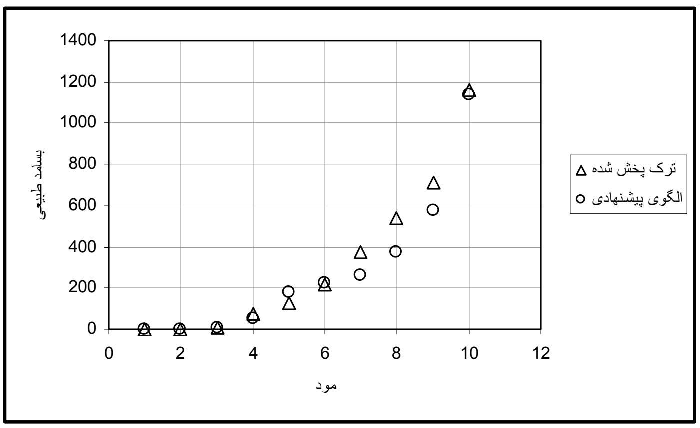


شکل ٦ تیر عمیق با شش جزء

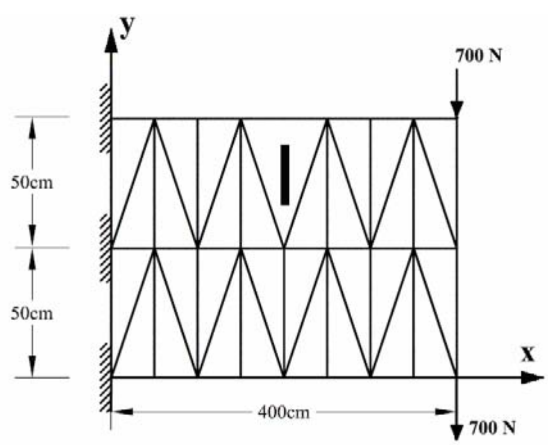
در ادامه، تغییر مکان‌های قائم زیر این تیر و مقدارهای ویژهٔ آن، توسط الگوی پیشنهادی حساب می‌شود. سپس، با نتایج ترک پخش شده، مقایسه می‌گردد. شکل‌های (۷) و (۸) پاسخ‌ها را نشان می‌دهند.
مثال ۲: در این نمونهٔ عددی، تیر پیشین، به وسیلهٔ سی و یک جزء تنش مستوی، مورد تحلیل قرار می‌گیرد. شبکه‌بندی سازه همانند شکل (۹) می‌باشد.



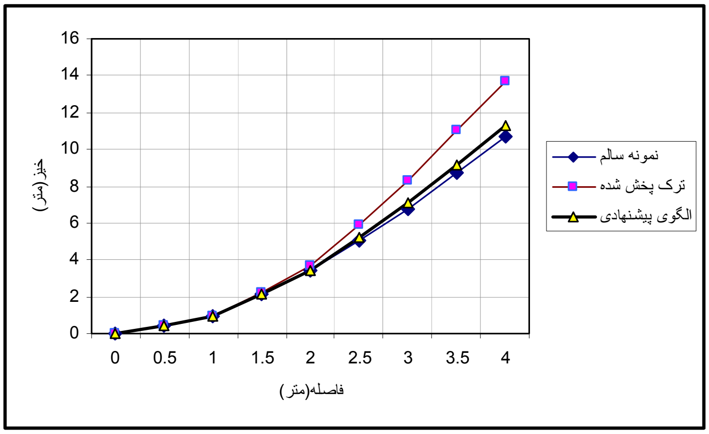
شکل ۷ نمودارخیز قائم تیر



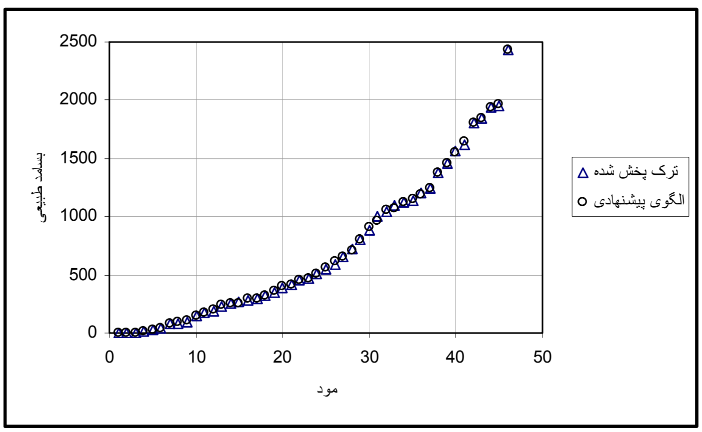
شکل ۸ مقایسهٔ بسامدهای طبیعی



شکل ۹ تیر عمیق با سی و یک جزء



شکل ۱۰ نمودارخیزهای قائم تیر



شکل ۱۱ مقایسهٔ بسامدهای طبیعی تیربا سی و یک جزء

خیز قائم زیر تیر، در شکل (۱۰) مقایسه می‌شود.

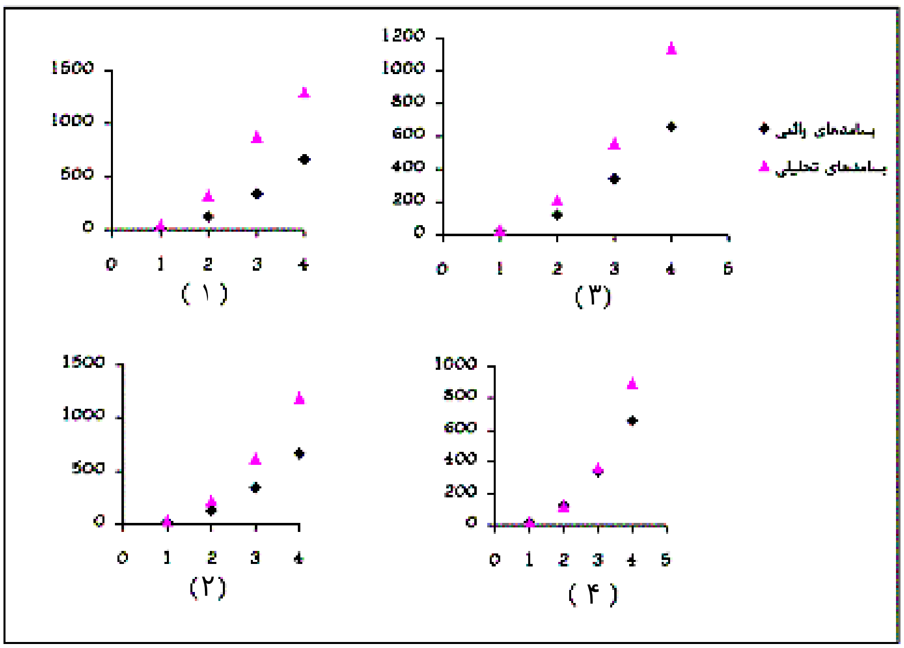
بسامدهای طبیعی این سازه برحسب رادیان بر ثانیه در شکل (۱۱) به نمایش در آمده‌اند.

مثال۳: تیر طره‌ای از جنس آلومینیم به طول ۰/۹۹۶، ارتفاع ۰/۲۵ و ضخامت ۰/۵ متر در دست می‌باشد. ضریب کشسانی سازه $۶۹/۷۹ \times ۱۰^{۹}$ نیوتن برمترمربع و نسبت پواسون آن ۰/۳۳ می‌باشد. این تیر دارای ترک قائمی به بزرگی ٤ میلی‌متردر فاصلهٔ ۰/۲۷۵ متری از تکیه‌گاه است. صورت کلی مسأله در مرجع[2] نشان داده‌شده‌است. چگالی مواد، ۲۵۵۰٦ نیوتن برمترمکعب می‌باشد.

بسامدهای طبیعی این مسأله، به وسیلهٔ الگوی پیشنهادی، برای تعداد جزء های متفاوت به دست می‌آید و با نتایج الگوی تیری مرجع[2] مقایسه می‌گردد. این مقدارها در جدول (۱) درج شده‌است.

جدول ۱ بسامدهای چهار مود نخست نوسان سازه(هرتز)

مود	پاسخ واقعی	مرجع [2]	۷۹جزء	۱۵۵جزء	۱۸۸جزء	۳۹۹جزء
۱	۲۰/۰۰۰	۱۹/٦٤۱	٤۰/۰٤٦	۳۱/۷۰۲	۲۹/۱۲۹	۲۱/۰۱
۲	۱۲٤/۲٥۰	۱۲٤/۱۰٦	۳۱۹/۹۸	۲۱۷/۰٥٦	۲۰۹/٥٤۳	۱۲٦/٦۱۳
۳	۳٤۰/۸۱۳	۳٤۰/۷٥۸	۸۷۸/۷۳	٦۱٥/۰۷٦	٥٥۹/۲٥۸	۳٥۷/۸۱۳
٤	٦٦۲/۸۱۳	٦٦۳/۰۲۰	۱۲۹۹/۸٤	۱۱۸۳/۸٦۸	۱۱٤۲/۱٦٤	۸۹٦/۲۱۳



شکل ۱۲ مقایسهٔ بسامدهای طبیعی الگوی پیشنهادی ومقدارهای واقعی

شکل (۱۲)، مقدارهای واقعی بسامدهای چهار مود اول سازه را با مقدارهای به دست آمده از الگوی پیشنهادی مقایسه می‌کند. بر این اساس، آشکار می‌گردد که با زیاد شدن تعداد جزء، پاسخ‌های الگوی پیشنهادی به جواب‌های واقعی نزدیک‌تر می‌شوند. این سخن در شکل‌های(۱۲–۱) تا (۱۲–٤) نمایان است.

نتیجه‌گیری

در هنگام ایجاد ترک، ماتریس سختی سازه کاهش پیدا می‌کند. بر این اساس، تغییر مکان‌های سازه افزایش و بسامدهای طبیعی آن، کاهش می‌یابد. در نمونهٔ عددی یکم، تیر عمیقی با شش جزء تحلیل شد. تغییر مکان‌های الگوی ترک پخش شده، در طول تیر، کم‌تر از

الگوی پیشنهادی بوده‌است. بنابراین، وقتی شبکه‌بندی درشت باشد، نتیجه‌های نمونهٔ پیشنهادی از الگوی ترک پخش شده، محافظه کارانه‌تراست. در نمونهٔ عددی دوم، تیر طره‌ای با سی و یک جزء تحلیل شد. پاسخ‌ها آشکار می‌سازد که هر چه شمار جزءها بیشتر گردد، خیز تیر تحلیل شده به واقعیت نزدیک‌تر می‌شود؛ از این رو، رابطه‌سازی پیشنهادی برای تعداد جزءهای زیاد، نتایج خوبی در دسترس قرار می‌دهد. ازسوی دیگر، نتایج آن در شبکه بندی‌های درشت، نسبت به ترک پخش شده، محافظه‌کارانه‌تر است.

نتایج نمونهٔ عددی سوم آشکار می‌کند که پاسخ‌های الگوی پیشنهادی در مودهای نخستین به مقدارهای واقعی نزدیک‌تر می‌شود. این ویژگی به خاطر حساسیت شدید ماتریس نرمی، به دگرگونی بسامدهای پایین سازه می‌باشد؛ از این رو در سازه‌هایی مثل دیوار برشگیر و تیر عمیق، جزء سه پهلوی نویسندگان، کارآیی بالاتری خواهد داشت. بر این اساس، راه‌کار پیشنهادی، برای این گونه سازه ها با شمار جزء کم‌تر، پاسخ‌های خوبی به ارمغان می‌آورد.

نشانه‌ها

ارتفاع جزء سه پهلو از گوشهٔ i ام	h_i
تنش تسلیم مواد	σ_{yi}
تنش قائم راستای y	σ_{yy}
زاویهٔ گوشهٔ i ام جزء	θ_i
ضریب برشی	G
ضریب شدت تنش حالت II ترک	k_{II}
ضریب کشسانی	E
کسینوس‌های هادی امتداد ij	m_{ij}, l_{ij}
ماتریس سختی جزء پیشنهادی	$[K_e]$
ماتریس مبدل نیرویی	$[T]$
ماتریس نرمی اضافی در اثر ایجادترک	$[C]^1$
ماتریس نرمی کل	$[C]$
نصف طول ترک	a
تنش برشی	σ_{xy}
تنش قائم راستای x	σ_{xx}
زاویهٔ امتداد ترک با محور x ها	ψ
ضخامت جزء	t
ضریب شدت تنش حالت I ترک	k_I
ضریب قفل وبست دانه‌ای	β_t
انرژی کرنشی رها شده درهنگام ترک	u^1
ماتریس دوران کرنش‌ها	$[E]$
ماتریس کرنش	$[B]$
ماتریس مواد جزء ترک خورده	$[D_{cr}]$
ماتریس نرمی جزء سالم	$[C]^0$
نسبت پواسون	ν
وارون ماتریس مواد	$[\phi]$

مراجع

1. Lee, Y. S., and Chung, M. J., "A Study on Crack Detection using Eigen Frequency Test Data", Computers and Structures, 77 (3), pp. 327 – 342 , (2000) .
2. Sinha, J. K., Friswell, M. I., and Edwards, S., "Simplified Models for the Location of Cracks in Beam Structures using Measured Vibration Data", *Journal of Sound and Vibration*, 25 (1) , pp. 13 – 38 , (2002) .

3. Krawczuk, M., Palacz, M., and Ostachowicz, W., "The Dynamic Analysis of a Cracked Timoshenko Beam by the Spectral Element Method", *Journal of Sound and Vibration*, 264 (5), pp. 1139 – 1153, (2003).

4. Krawczuk, M., Zak, A., and Ostachowicz, W., "Finite Element Model of Plate with Elasto – Plastic Through Crack", Computers and Structures, 79 (5), pp. 519 – 532, (2001).

5. Beletti, B., Cerioni, R., and Iori, I., "Physical Approach for Reinforced – Concrete (PARC) Membrane Elements", *Journal of Structural Engineering*, 127 (12), pp. 1412 – 1426, (2001).

6. Saavedra, P. N., and Cuitino, L. A., "Crack Detection and Vibration Behavior of Cracked Beams", Computers and Structures, 79 (16), pp. 1451 – 1459, (2001).

7. Foster, S. J., and Marti, P., "Cracked Membrane Model: Finite Element Implementation" ,*Journal of Structural Engineering*, 129 (9), pp. 1155 – 1163, (2003).

8. Przemieniecki, Theory of Matrix Structural Analysis, (1968).

9. Qian, G. L., Gu, S. N., and Jiang, J. S., "A Finite Element Model of Cracked Plates and Application to Vibration Problems", Computers and Structures, 39 (5), pp. 483 – 487, (1991).

10. Tada, H., Paris, P. C., and Irwin, G. R., "The Stress Analysis of Crack Hand Book", ASME Press, (2000).

11. Chen, W. F., "Plasticity in Reinforced Concrete", Mc Graw – Hill, (1982).

12. Kotsovos, M. D., and Pavlovic, M. N., "Structural Concrete: Finite Element Analysis for Limit – State Design", T. Telford , (1995).